Giacomo Mauro D'Ariano
QUIT Group, Dipartimento di Fisica A. Volta, Pavia

Casualità di natura ontica o epistemica? Riflessioni sulla Meccanica Quantistica.*

SOMMARIO
La Meccanica Quantistica, per particolari misurazioni eseguite congiuntamente su due particelle lontane, prevede correlazioni non locali esotiche che escludono ogni possibile interpretazione *locale realista*. In sintesi, queste misurazioni non possono essere interpretate come la *lettura di un valore oggettivo preesistente la misurazione stessa*. Ne consegue che la casualità del risultato della misurazione è di natura *ontica* e non *epistemica*, ovvero non è sinonimo di mancanza di conoscenza di un valore preesistente, ma la casualità è generata all'atto stesso della misurazione.
In questa lezione ripercorreremo in dettaglio l'argomentazione suddetta, cominciando con il chiarire la distinzione fra i diversi tipi di correlazioni: locali, nonlocali-acausali, e nonlocali-causali. A tal scopo analizzeremo in dettaglio un *semplice esperimento mentale* – la Macchina di Popescu – che, per allietare il lettore, presenterò in forma di storia narrata. Procederemo quindi con la derivazione del bound di Clauser Home Shimony e Holt – una delle cosiddette *disuguaglianze di Bell* – la cui violazione discrimina le correlazioni nonlocali. Illustrerò quindi l'argomento di Mermin Greenberger Horne Zeilinger, che dimostra su basi puramente logiche la contestualità della misurazione insita nella Meccanica Quantistica. Alla luce di queste considerazioni ripercorreremo criticamente anche l'argomento originale di Einstein Podolski e Rosen sull'*incompletezza della Meccanica Quantistica*.

1 Introduzione

In questa breve lezione avremo modo di verificare direttamente con semplici calcoli la rivoluzione concettuale implicata dalla Meccanica Quantistica, una rivoluzione molto più drastica di quella della Teoria della Relatività, perchè mette in discussione addirittura la concezione stessa che abbiamo di *oggettività* o *realismo*. Per chi non avesse mai sentito parlare di queste cose potrebbe essere un vero e proprio *choc* culturale. Non si può certo pretendere nell'arco della lezione stessa di comprendere a fondo argomenti che sono stati dibattuti per settant'anni, a cominciare dalla pubblicazione del famoso lavoro di Einstein Podolski e Rosen nel 1935 [EPR35]. Tengo però a sottolinare che un lettore in possesso di elementi base di Meccanica Quantistica e calcolo delle matrici, con gli elementi forniti in questa lezione potrà senz'altro raggiungere una comprensione approfondita ed un personale convincimento, dopo una necessaria pausa di riflessione, ed avendo ripercorso autonomamente anche le semplici derivazioni matematiche riportate in appendice.

2 Correlazioni istantanee

Uno degli aspetti più sconvolgenti della Meccanica Quantistica è la *non località,* connessa con l'esistenza di correlazioni *istantanee* che si verificano per particolari preparazioni di coppie di particelle in stati cosiddetti *entangled*. Nellinguaggio della Meccanica Quantistica lo stato entangled è uno stato puro non fattorizzato, dove ognuna delle due particelle non ha un proprio stato definito. Un caso tipico è quello di due particelle a spin $s = ½$ in uno stato cosiddetto di *singoletto*. Questo stato matematicamente è descritto dall'equazione

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle). \tag{1}$$

* Lezione tenuta l'1 Dicembre 2004 al President Hotel di Salice Terme, nell'ambito della Scuola di Storia della Fisica *Aspetti di Storia della Fisica dagli anni trenta al secondo dopoguerra*, organizzata dall'AIF (Associazione per l'insegnamento della Fisica), da pubblicarsi su un Quaderno dell'AIF.

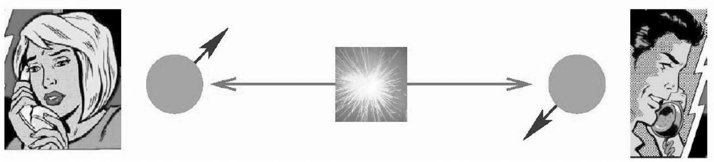

Figura 1: Stato di singoletto. Due particelle vengono generate in uno stato di singoletto (vedi Eq. (1)) mediante decadimento o mediante un mezzo ottico nonlineare, e raggiungono due sperimentatori molto lontani – Alice e Bob. Essi eseguono quindi una misurazione del verso dello spin in direzioni parallele. Il verso dello spin misurato risulta sempre opposto per Alice e Bob, per qualunque direzione di misurazione. Il verso effettivamente rivelato è uno dei due versi opposti con ugual probabilità ½. Le misurazioni di Alice e Bob sono separate da un intervallo spazio-tempo *space-like*. Se si scelgono le direzioni di misura perpendicolari fra loro – anzichè parallele – allora i risultati delle misurazioni di Alice e Bob sono completamente scorrelati.

La notazione “prodotto tensore” $\otimes$ specifica lo spin della particella 1 – alla sinistra del simbolo $\otimes$ – e della particella 2 alla destra. Qual’è lo spin della particella 1? Su o giù? In effetti lo stato (1) ci dice che non è né su né giù, ma è sicuramente opposto a quello della particella 2 (se ignoriamo la particella 2 lo stato della particella 1 è a tutti gli effetti una miscela al 50% di su e giù). Si può anche facilmente verificare che se si cambia la base corrispondentemente alla scelta di una generica direzione di quantizzazione “obliqua” dello spin, ovvero

$$\begin{aligned} &|\nearrow\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle, \\ &|\swarrow\rangle = \beta^*|\uparrow\rangle - \alpha^*\beta|\downarrow\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \end{aligned} \tag{2}$$

lo stato di singoletto resta invariante in forma, ovvero

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow\rangle \otimes |\swarrow\rangle - |\swarrow\rangle \otimes |\nearrow\rangle). \tag{3}$$

La conseguenza è che se si misura lo spin 1 in una qualunque direzione fissata ⤢ si ottiene lo spin nei versi $\nearrow$ e $\swarrow$ con ugual probabilità ½. Ma, si ha anche che se la misura sullo spin 1 dà risultato $\nearrow$, allora si prevede con certezza che una misura nella stessa direzione per lo spin 2 darà verso opposto $\swarrow$ (e analogamente, se sullo spin 1 si ottiene $\swarrow$, allora sullo spin 2 si ottiene certamente $\nearrow$). Tutto ciò è ovviamente in accordo con la conservazione del momento angolare totale, e – cosa questa non banale – avviene *istantaneamente* – si, superluminalmente! – ed in assenza di alcun tipo di interazione tra le particelle, in principio anche con particelle molto lontane l’una dall’altra (ovviamente se le particelle non sono disturbate da interazioni con particelle terze circostanti).

Cosa vuole dire che le correlazioni sono istantanee? Un lettore con basi elementari di Relatività ristretta è ben consapevole del significato d’istantaneità. Considerate un sistema di riferimento rispetto al quale due particelle sono ferme (oppure più generalmente, se le particelle sono in moto relativo, prendete il sistema di riferimento del centro di massa). Immaginiamo ad esempio che in questo sistema di riferimento la particella 1 sia su Marte e la particella 2 sia su Giove, ove si trovano rispettivamente anche due sperimentatori: Alice e Bob. Alice e Bob hanno sincronizzato i loro orologi e hanno stabilito un sistema di riferimento comune, e usano direzioni di riferimento convenzionali che chiamano NE (Nord Est), SW (Sud Ovest), eccetera. Supponiamo ora che le particelle 1 e 2 si trovino nello stato di singoletto (1). Allora, Alice misura lo spin della particella 1 in direzione ⤢ NE-SW, e BOB allo stesso istante misura lo spin della particella 2 sempre nella stessa direzione NE-SW. Ebbene, Alice e Bob trovano sempre immancabilmente versi opposti – ad esempio Alice ha lo spin $\nearrow$ (che punta verso NE) e Bob $\swarrow$ (verso SW). E ciò avviene indipendentemente dalla direzione di misura che essi scelgono: per esempio se scelgono direzione $\updownarrow$ N-S, quando Alice trova lo spin diretto verso Nord $\uparrow$, allora Bob lo troverà sicuramente diretto verso Sud $\downarrow$ e via di seguito. L’impres-

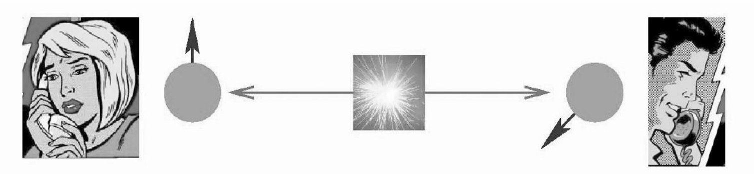

Figura 2: Stato di singoletto. Se Alice e Bob scelgono le due direzioni di misurazione a 45°, le correlazioni risultanti fra i risultati di Alice e di Bob sono "esotiche". Come si mostra nel testo, tali correlazioni mettono in crisi il realismo o oggettività della misurazione, nel senso che non si può attribuire allo spin di una particella un verso oggettivo preesistente la misurazione stessa. Ad esempio, non è più possibile affermare che prima della misurazione la particella di Alice aveva oggettivamente lo spin diretto verso l'alto. In una interpretazione strettamente realista si possono solo spiegare le correlazioni per direzioni di misura di Alice e Bob parallele e perpendicolari, ma non le correlazioni per direzioni a 45°.

sione è che sussista un rapporto di causalità, nel senso che Alice dice: "Ecco io misuro in direzione N-S, trovo lo spin diretto verso Nord, e so che se Bob misura anch'egli nella stessa direzione allo stesso istante trova lo spin diretto a Sud. Con la mia misura, ho *causato* lo spin di Bob puntare verso Sud." In realtà non può esserci alcuna causalità: infatti, le misure di Alice e Bob sono simultanee solo nel loro sistema di riferimento proprio. Ma se si considera un altro sistema di riferimento in moto rispetto al precedente si può scambiare a piacimento l'ordine temporale fra le due misure, e avere ad esempio che la misura di Alice avvenga prima di quella di Bob, o viceversa, a seconda del verso del moto del sistema di riferimento. Nel primo caso sembra che sia Alice a "causare" il risultato visto da Bob, mentre nell'altro sembra che sia Bob a causare il risultato visto da Alice. Il punto è che, come ben sappiamo, *correlazione* e *causalità* sono due concetti ben diversi!

Considerato che il verso dello spin risulta sempre opposto indipendentemente dalla scelta della direzione di misura (comunque la stessa per Alice e Bob), potrebbe sembrare anche che si possa sfruttare il fenomeno per fare delle comunicazioni istantanee. In realtà non c'è nessuna possibilità di comunicazione, perchè il risultato della misura di Alice non è da lei controllabile (idem dicasi per Bob), e lo spin risulta in versi opposti sempre con probabilità ½, indipendentemente dalla direzione di misurazione. Non c'è quindi possibilità di comunicare, in quanto Bob trova sempre risultati casuali con probabilità ½, indipendentemente da cosa ha fatto Alice. Se si scelgono le direzioni di misura perpendicolari fra loro – anzichè parallele – allora in questo caso i risultati delle misurazioni di Alice e Bob sono completamente scorrelati, come si può calcolare facilmente. Invece, se si scelgono due direzioni di misurazione a 45°, le correlazioni risultanti fra i risultati di Alice e di Bob sono talmente esotiche che, come vedremo, mettono in crisi il realismo stesso, ovvero l'esistenza di una realtà oggettiva preesistente la misurazione. Ciò significa che non è più possibile affermare che prima della misurazione la particella aveva oggettivamente lo spin diretto ad esempio verso l'alto, e la misurazione non è che una "lettura" di questo valore. In parole povere, non si può attribuire allo spin di una particella un verso oggettivo preesistente la misurazione stessa! In una interpretazione strettamente realista si possono solo spiegare le correlazioni per direzioni di misura di Alice e Bob parallele e perpendicolari, ma non le correlazioni per direzioni a 45°.

Per chiarire meglio le idee, cerchiamo ora di capire la differenza fra i seguenti tipi di correlazioni: *locali, nonlocali-acausali,* e *nonlocali-causali*[1]. Per illustrare questi concetti utilizzerò un'idea che ho sentito raccontare da Sandu Popescuun professore di Bristol – in una conferenza per la celebrazione del settantesimo compleanno di Francesco De Martini. L'idea si basa su di un esperimento ideale eseguito mediante una "macchina", che, in onore del suo inventore, chiamerò la *Macchina di Popescu.* Questo esperimento ideale rappresenta un'evoluzione didattica notevole del concetto di non località.

3 Tipi di correlazione: la macchina di Popescu

Per il vostro divertimento illustrerò l'esperimento ideale della macchina di Popescu nella forma gradevole di una storiella di fantascienza.

Alice deve andare su Venere e vuole comunicare con Bob, il quale, ahime, dovrà restare sulla Terra. Ovviamente i due desiderano comunicare in maniera istantanea. Allora, Alice e Bob decidono di andare alla Superluminal Corporation di Bristol, ove acquistano una macchinetta che viene spacciata loro come utile allo scopo. La macchinetta ha due pulsanti – rosso e blu – per Alice e due pulsanti uguali per Bob (vedi figura 3). Ha anche due coppie di lampadine di colori diversi, una coppia per Alice e una per Bob. La macchina per comunicare è un blocco unico, e in quanto tale è in realtà solo un prototipo dimostrativo: quando Alice dovrà veramente andare su Venere se ne porterà via solo una metà – un ricetrasmettitore con i suoi due pulsanti e le sue due lampadine – mentre l'altra metà resterà a Bob. Denoteremo i due pulsanti con la variabile $X = 0,1$ per Alice e la variabile $Y = 0,1$ per Bob, mentre denoteremo le lampadine di colori diversi con le variabili a = 0,1 per Alice e b = 0,1 per Bob. Il modo in cui si dovrebbe effettuare la comunicazione è evidente: pulsante "0" viene trasmesso "0", pulsante "1" viene trasmesso "1"; lampadina "0" viene ricevuto "0", lampadina "1" viene ricevuto "1".

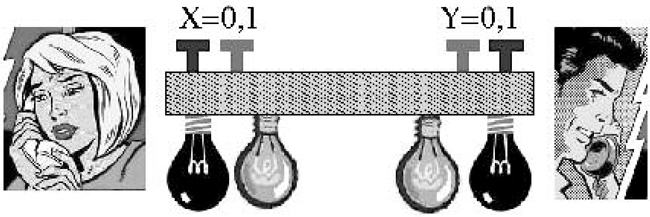

Figura 3: La macchina di Popescu per le comunicazioni fra Alice e Bob. Alice e Bob dispongono di due bottoni da premere (uno blu e uno rosso), che denoteremo con la variable $X = 0,1$ per Alice e la variabile $Y = 0,1$ per Bob. Inoltre, sia Alice che Bob hanno due lampadine di colori diversi, che denoteremo con le variabili $a = 0,1$ per Alice, e $b = 0,1$ per Bob.

Alice e Bob, però, hanno pochi soldi, e acquistano quindi un prototipo economico di comunicatore con gli interruttori rossi bloccati! In qualche modo, però, il prototipo funziona: Alice e Bob possono solo premere il pulsante rosso (a tempi prestabiliti!), e le lampadine si accendono con il colore della lampadina che è lo stesso per Alice e per Bob (il colore è casuale, ma per entrambi è lo stesso). Alice sembra non essere completamente scontenta: in fondo si rincuora nel sapere che quando si accende la sua luce "O" anche quella di Bob sarà sicuramente "0", e se si accende la sua luce "1" allora anche quella di Bob è sicuramente "1". Questo, però, dà solo una parvenza di comunicazione, ma non comunica nulla! Alice non può decidere cosa trasmettere, perchè ha un solo pulsante da premere! Ma come funziona la macchinetta? Mettiamo i risultati in una tabellina (Tab. 1). Poichè i pulsanti rossi sono bloccati, si può avere soltanto

X	Y	a	b	$P(a,b\|X,Y)$
0	0	0	0	1/2
		1	1	1/2

Tabella 1: La macchina di Popescu con i pulsanti rossi bloccati.

$X = Y = 0$, mentre a e b possono avere solo valori uguali, ovvero 00 e 11 con uguali probabilità 1/2. Dalla tabella ci rendiamo facilmente conto che la macchinetta non comunica assolutamente a niente, e Alice e Bob hanno preso, come si dice, un "bidone". In effetti la macchinetta si può realizzare molto semplicemente con due memorie: una memorietta per Alice ed una per Bob. Chiamiamo le due memorie `MEMA` e `MEMB`. Qual'è il contenuto delle due memorie? La sequenza di colori della lampadina di Alice è casuale, ad esempio 010010111001. Bob deve avere necessariamente gli stessi risultati, ovvero 010010111001. Ma allora, i risultati erano stati semplicemente memorizzati localmente nella memoria di Alice e in quella di Bob prima che la macchina fosse venduta, e non c'è nessuna comunicazione istantanea! La memoria di Alice è:

$$\texttt{MEMA} = 010010111001\ldots,$$

e quella di Bob è

$$\texttt{MEMB} = 010010111001\ldots,$$

ovvero le due memorie hanno lo stesso contenuto. Quando Alice e Bob cominciano ad usare la macchina premendo il bottone blu, essi vedono 0, poi 1, poi 0, 0, 1, eccetera. Semplicemente i risultati vengono *letti successivamente* dalle loro memorie locali, e c'è perfetta correlazione semplicemente perchè le due memorie hanno contenuto identico. Ma evidentemente ciò significa anche che non ci può essere alcuna comunicazione!

Alice e Bob tornano un po' arrabbiati dal signor Popescu della Superluminai Corporation. "È vero, volevamo risparmiare, ma insomma...". Allora Popescu consegna loro ora un nuovo prototipo, questa volta con entrambi i pulsanti funzionanti. Ora Alice e Bob possono scegliere quale pulsante premere, e quindi quale valore inviare. Sono ora possibili tutte e quattro le combinazioni di scelte dei pulsanti di Alice e di Bob. Sono anche possibili tutte e quattro le combinazioni di lampadine accese e spente. Alice e Bob fanno un po' di esperimenti, e stilano la tabella dei risultati (Tab. 2).

X	Y	a	b	$P(a,b\|X,Y)$
0	0	0	0	1/2
		1	1	1/2
0	1	0	1	1/2
		1	0	1/2
1	0	0	1	1/2
		1	0	1/2
1	1	0	0	1/2
		1	1	1/2

Tabella 2: La macchina di Popescu con entrambi i pulsanti funzionanti, ma le correlazioni sono ancora ottenibili con memorie locali.

In sintesi si ha la seguente situazione: se Alice e Bob schiacciano lo stesso bottone ottengono lo stesso risultato casuale, se schiacciano bottoni opposti ottengono risultati casuali opposti. Alice e Bob si ritengono soddisfatti: ora pensano di poter comunicare. "Quando schiacciamo pulsanti di colore diverso otteniamo risultati opposti, quando schiacciamo lo stesso pulsante otteniamo lo stesso identico risultato". Quando però saranno uno su Venere e l'altro sulla Terra non potranno controllare le correlazioni al momento: potranno solo prenderne nota, e poi farsi visita per confrontare i rispettivi risultati. In effetti, ancora una volta la macchinetta non permette di comunicare alcunchè, perchè sia Alice che Bob ottengono a caso il risultato 0 o 1, indipendentemente dal pulsante che l'altra persona ha premuto. Si rendono conto di essere stati bidonati un'altra volta. In effetti, anche questa volta la macchinetta funziona con due memorie locali, e quando Alice andrà su Marte non farà altro che portarsi dietro la sua memoria, mentre Bob resterà sulla Terra con l'altra memoria. Semplicemente ora la memoria avrà più registri, uno per ogni pulsante premuto.

Vediamo se riusciamo a realizzare la macchina con memorie locali composte di due registri, uno per ogni pulsante premuto localmente. Mettiamo nella memoria di Alice una stringa di numeri casuali – ad esempio 0110001 per il pulsante $X = 0$. La memoria di Bob per lo stesso pulsante ($Y = 0$) dovrà produrre gli stessi numeri, e pertanto conterrà anch'essa la stessa stringa 0110001. Se invece il pulsante è ($Y = 1$), il risultato deve essere opposto, e la memoria conterrà 1001110. Ma ora chiaramente se Alice preme $X = 1$ dovrà avere lo stesso risultato di Bob per $Y = 1$, quindi la sua memoria dove contenere 1001110. Riassumendo la memoria di Alice è

$$\mathtt{MEMA}\,\begin{matrix} X = 0 \\ X = 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0110001 \\ 1001110 \end{matrix}\cdots,$$

e lo stesso per Bob

$$\mathtt{MEMA}\,\begin{matrix} Y = 0 \\ Y = 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0110001 \\ 1001110 \end{matrix}\cdots,$$

in modo che entrambi ottengono sempre lo stesso risultato casuale se premono lo stesso bottone, o ottengono risultato casuale opposto se premono bottone opposto. Quindi con due memorie locali siamo riusciti a realizzare anche questa macchinetta, che ovviamente non può realizzare alcuna comunicazione, essendo i risultati già memorizzati in partenza. Questa volta Alice e Bob ritornano davvero molto arrabbiati a Bristol alla Superluminal Corporation. Popescu per farsi perdonare regala loro un' altra macchinetta. Il funzionamento della macchinetta ora è dato in Tabella 3.

X	Y	a	b	$P(a,b\|X,Y)$
0	0	0	0	1/2
		1	1	1/2
0	1	0	0	1/2
		1	1	1/2
1	0	0	0	1/2
		1	1	1/2
1	1	0	1	1/2
		1	0	1/2

Tabella 3: La macchina di Popescu "quantistica".

Questa volta la regola è la seguente: quando Alice e Bob premono entrambi il pulsante 1 ottengono risultato casuale opposto. Invece, per qualunque altra scelta dei pulsanti ottengono identico risultato casuale, sempre con ugual probabilità. Alice e Bob sono un pò frastornati, e si chiedono se sia possibile realizzare anche questa macchinetta mediante memorie locali. Ora se Alice preme $X = 1$ e Bob preme $Y = 0$ devono ottenere lo stesso risultato, il che significa che la memoria di Alice e di Bob rispettivamente per $X = 1$ e $Y = 0$ devono avere contenuti uguali. Altrettanto se premono $X = 0$ e $Y = 0$, ovvero la memoria di Alice e di Bob rispettivamente per $X = 0$ e $Y = 0$ devono avere ugual contenuto. E altrettanto dicasi per $X = 0$ e $Y = 1$. Ne consegue che, per transitività, anche per $X = 1$ e $Y = 1$, le memorie devono contenere la stessa stringa. Ma ciò contraddice il risultato "sperimentale" che dice che i due valori devono essere opposti! Ne concludiamo che questa macchina non può essere costruita semplicemente con memorie locali, ma abbisogna di una qualche forma di "azione a distanza". Utilizzando memorie possiamo ottenere i risultati giusti solo 3 volte su 4. Alice e Bob sono perplessi: non sarebbero capaci di realizzare questa macchinetta. C'è però il solito problema: ancora una volta la macchina è inutilizzabile per comunicare, perchè la probabilità che

Alice veda accendersi la lampadina 0 o la lampadina 1 è sempre ½, indipendentemente da quello che fa Bob! "Popescu è un furbone! Ma ci sentirà!", dice Alice.

Alice e Bob ritornano per l'ultima volta alla Superluminal Corporation da Popescu: "Anche se non siamo riusciti a capire come funziona la tua macchina, comunque non ci permette di comunicare un bel niente! Ora, dacci una macchina che funzioni davvero!" Popescu questa volta dà loro un prototipo che comunica veramente (ma li prende ancora in giro, perchè la macchina vera divisa in due ricetrasmettitori separati non funzionerà più alla partenza di Alice!) Come funziona la macchina questa volta? Riportiamo i risultati in Tabella 4.

X	Y	a	b	$P(a,b\|X,Y)$
0	0	1	1	1/4
		0	0	3/4
0	1	1	0	3/4
		0	1	1/4
1	0	0	1	3/4
		1	0	1/4
1	1	0	0	1/4
		1	1	3/4

Tabella 4: La macchina di Popescu che comunica veramente!

Questa volta la macchina comunica davvero per il seguente motivo: Alice vede accendersi la lampadina 1 con maggior probabilità (¾ anzichè ¼) quando Bob preme il pulsante 1, e parimenti vede accendersi con maggior probabilità la lampadina 0 se Bob preme 0. Questa macchina comunica! Se volete scrivere con un'equazione quando è possibile comunicare, bisogna fare come segue. Per vedere se Alice riceve informazione da Bob, considerate la probabilità dei risultati $a = 0{,}1$ *condizionata* dalle scelte $X, Y = 0{,}1$, e indicatela con il simbolo $P(a|X,Y)$ (il condizionamento si indica con una barretta). Tale probabilitàè la *marginale* della probabilità congiunta $P(a,b,|X,Y)$ dei risultati di entrambi, ovvero più precisamente $P(a|X,Y) = \sum_b P(a,b,|X,Y)$. Ebbene, Alice riceve informazione da Bob se la sua probabilità condizionata $P(a|X,Y)$ è una funzione non costante di Y. Tutto qui! Analogamente scambiando i ruoli di Alice e Bob. Pertanto, non si avrà comunicazione se entrambi le marginali locali non sono condizionate, ovvero in equazioni, se

$$\begin{aligned} \sum_b P(a,b\,|\,X,Y=0) &= \sum_b P(a,b\,|\,X,Y=1) \equiv f_1(a,X), \\ \sum_a P(a,b\,|\,X=0,Y) &= \sum_a P(a,b\,|\,X=1,Y) \equiv f_2(b,Y), \end{aligned} \tag{4}$$

ovvero se la probabilità dei valori di a è condizionata solo da Alice, e quella di b solo da Bob.

È facile verificare che le identità (4) sono verificate nei tre casi delle Tabelle 1-3, mentre sono violate nel caso in Tabella 4, nella quale ogni parte sa che il valore che ottiene è più probabilmente uguale al valore del pulsante premuto dall'altra parte (potete sostituire i valori delle probabilità condizionate nei vari casi nelle identà (4)).

La storiella della macchina di Popescu ci ha fatto capire la differenza concettuale fra i seguenti diversi tipi di correlazioni: correlazioni *locali, nonlocaliacausali,* e *non localicausali*. Le macchine delle Tabelle 1 e 2 descrivono correlazioni locali, ovvero che si possono ottenere mediante memorie locali. La macchina della Tabella 3 illustra il concetto di correlazioni nonlocali-acausali, ovvero che non possono essere ottenute mediante memorie locali, ma che comunque non permettono di comunicare informazione. Ed, infine, la macchina 4 esemplifica correlazioni nonlocali-causali, che permettono di comunicare informazione, e che quindi, anche, non possono essere ottenute mediante memorie locali.

Il collegamento con il nostro stato di singoletto è immediato. La scelta del pulsante equivale alla scelta della direzione di misurazione dello spin, mentre l'accensione dell'una o dell'altra lampadina equivale al verso dello spin risultante dalla misurazione. La macchina della Tabella 1 corrisponde al caso in cui Alice e Bob misurano nella stessa direzione e trovano sempre risultati opposti. Ora la correlazione perfetta ed istantanea non ci stupisce più: le particelle potrebbero avere una "memoria" interna nella quale è scritto un risultato predefinito, e questo per ogni possibile direzione parallela fra Alice e Bob (ovvero un registro di memoria per ogni possibile direzione). La misurazione non è quindi che una lettura della memoria. Ovviamente queste correlazioni sono inservibili per comunicare, ma le correlazioni ci sono, e Alice e Bob potrebbero verificarle a posteriori (Alice telefona a Bob: "Alice hai misurato anche tu S-N?" "Si' anch'io. lo ho trovato S". "E io ho trovato N"). Il problema è quindi mettere daccordo queste correlazioni scrivibili su memorie locali con quelle che si avrebbero per direzioni non parallele. Il caso di direzioni ortogonali, che dà risultati totalmente scorrelati, può essere ottenuto semplicemente con memorie fra loro scorrelate. Potrebbe essere visto come una variazione della macchina della Tabella 2. Il caso di direzioni di misurazione a *450,* invece, come verificheremo nella prossima sezione, è l'analogo della macchina in Tabella 3, ovvero le correlazioni, pur essendo acausali, non possono essere ottenute mediante memorie locali. Ma allora, questo significa che la misura dello spin non può essere concepita come la *lettura di un valore preesistente!* Ovvero, la casualità del risultato della misurazione non può essere interpretata come mancanza di conoscenza di un valore preesistente *(casualità epistemica),* bensì come effettivamente generata all'atto della misurazione *(casualità ontica).* Nel caso delle misurazioni sul singoletto, quindi, l'atto della misurazione non può essere interpretato come la lettura di una realtà esterna preesistente oggettiva.

4 La disuguaglianza di Clauser Horne Shimony Holt

Analizziamo ora con gli strumenti teorici della Meccanica Quantistica l'esperimento della misurazione dello spin sullo stato di singoletto. La misurazione dello spin nella direzione z è descritta dall'operatore Hermitiano σ_z, quella nella direzione x dall'operatore Hermitiano σ_x, e così via. σ_α, con $\alpha = x, y$, z, sono le cosiddette matrici di Pauli che tutti conoscono

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Sappiamo che gli autovalori di queste matrici sono ±1 corrispondetemente al risultato della misurazione: +1 *spin su,* –1 *spin giù,* nelle direzioni *x, y* o *z*, rispettivamente. Riscriviamo lo stato di singoletto come segue

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle), \tag{6}$$

dove $|\pm\rangle$ denotano gli autovettori di σ_z corrispondenti agli autovalori ±1. La notazione "prodotto tensore" ⊗ specifica lo spin di Alice alla sinistra di ⊗ e quello di Bob alla destra di ⊗.

Consideriamo quindi il seguente esperimento. Alice misura il primo spin nella direzione a scelta fra z e x, mentre Bob misura il secondo spin nella direzione a scelta fra ±45°. Le misurazioni di Alice sono descritte dagli operatori Hermitiani σ_z e σ_x che denoteremo in seguito $Z \equiv \sigma_z$ e $X \equiv \sigma_x$, mentre le misurazioni di Bob sono descritte dalle matrici di Pauli “ruotate” $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\sigma_z + \sigma_x)$ che denoteremo $U \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_z + \sigma_x)$ e $W \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(+\sigma_z + \sigma_x)$. In notazione tensore le osservabili misurate da Alice e Bob sono quindi $Z \otimes I$, $X \otimes I$, $I \otimes U$, e $I \otimes W$. Denotiamo quindi con z_A, x_A, u_B and w_B i risultati casuali delle misurazioni suddette.

Supponiamo ora che l’esperimento sopraddetto descriva la misurazione di quantità oggettive preesistenti, ovvero se misuro lo spin verticalmente e lo trovo rivolto verso l’alto ciò vuoi dire che lo spin prima della misura “era diretto verso l’alto”, e semplicemente con la misura determino quale verso aveva precedentemente la misura. Che cosa significa? Significa che sto considerando la casualità di natura puramente epistemica, ovvero che la misura “legge” un valore oggettivo ±1 preesistente ignoto. Calcoliamo quindi la seguente correlazione

$$\overline{z_A w_B + x_A w_B + x_A u_B - z_A u_B}, \tag{7}$$

dove il segno di sopralineato denota la media sui risultati di misurazioni ripetute. Possiamo raccogliere i termini come segue

$$\begin{aligned} &z_A w_B + x_A w_B + x_A u_B - z_A u_B \\ &= (z_A + x_A) w_B + (x_A - z_A) u_B, \end{aligned} \tag{8}$$

da cui deduciamo che, poichè le variabili assumono solo i valori ±1, l’uno o l’altro dei termini in parentesi deve necessariamente annullarsi, e pertanto si avrà

$$(z_A + x_A) w_B + (x_A - z_A) u_B = \pm 2. \tag{9}$$

Mediando termini compresi fra ±2 otterremo un valore compreso nell’intervallo [–2,+2], e quindi necessariamente la correlazione (7) sarà limitata come segue

$$\left|\overline{z_A w_B + x_A w_B + x_A u_B - z_A u_B}\right| \leq 2. \tag{10}$$

La disuguaglianza (10) è dovuta a Clauser, Horne, Shimony e Holt [CHSH69]. Se il valore della correlazione (7) previsto dalla Meccanica Quantistica – e quindi verificato sperimentalmente – violasse il bound (10, allora vorrebbe dire che:

L’ipotesi che la misurazione legge valori oggettivi preesistenti è falsa!

Si noti che il bound (10) è conseguenza immediata di questa ipotesi.

Un modo equivalente di vedere il problema dell’oggettività è quello delle cosiddette variabili nascoste. Ovvero, esistono variabili nascoste che la Meccanica Quantistica non è in grado di descrivere, variabili con valori oggettivi che esistono indipendentemente dal fatto che si esegua una misurazione. Ebbene, il bound CHSH discende dall’ipotesi di esistenza di variabili nascoste, e la violazione del bound ne esclude logicamente la possibilità.

Esperimenti su fotoni sono in accordo con le predizioni della Meccanica Quantistica sulla violazione del bound CHSH [sull’interpretazione degli esperimenti si veda però la discussione concernente l’efficienza quantica dei rivelatori nella Sezione 6]. La disuguaglianza CHSH è solo una di una lunga serie di analoghe ineguaglianze note oggi come *disuguaglianze di Bell* [Bel87, Bel66, Kaf89] (la prima di queste disuguaglianze fu scoperta da John Bell nel 1964 [Bel64]).

In Appendice calcoliamo il valore della correlazione (7) previsto dalla Meccanica Quantistica. Esso risulta essere

$$\langle Z \otimes W + X \otimes W + X \otimes U - Z \otimes U \rangle = -2\sqrt{2}. \tag{11}$$

Tale valore viola palesemente il bound (10). Ne deduciamo quindi che, come preannunciato, la misura non legge valori preesistenti sconosciuti, e la casualità del risultato è invero di natura *ontica!* Non posso quindi affermare che ci sono valori preesistenti la misurazione – ad esempio, non posso dire che quando misurate lo spin in una certa direzione, lo spin si trovava diretto verso l'alto prima della misura.

Esiste invero ancora un modo per ristabilire il realismo, ma al prezzo di rinunciare alla località! Ovvero: lo spin di Alice ha sì un valore preesistente, ma nel senso che ha in realtà diversi valori possibili, uno per ogni scelta di direzione di misura di Bob! (E, lo stesso, ovviamente, scambiando i ruoli di Alice e Bob). Matematicamente, ciò significa che, anzichè usare le variabili casuali z_A, x_A, u_B and w_B, usiamo invece le variabili $z_{A,u}$, $z_{A,w}$, $x_{A,u}$, $x_{A,w}$, $u_{B,x}$, $u_{B,y}$, $w_{B,x}$, e $w_{B,y}$, dove, ad esempio $z_{A,u}$ denota il risultato di Alice che misura Z quando Bob misura U. In effetti, ora la correlazione (7) sarebbe la media dei seguenti termini

$$z_{A,w}w_{B,z}+x_{A,w}w_{B,x}+x_{A,u}u_{B,x}-z_{A,u}u_{B,z}=0,\pm2,\pm4, \tag{12}$$

e non si ha più l'annullamento di una delle due parentesi nell'identità (9) – perchè non si può più raccogliere w_B e u_B – e quindi come risultato si puòavere anche ±4, valore che può ora dar luogo ad una violazione del bound (10). Ne concludiamo che possiamo anche immaginare l'esistenza di una realtà oggettiva, ma essa deve necessariamente essere non locale! Nel linguaggio delle *variabili nascoste,* la conclusione è che la violazione del bound CHSH dimostra l'impossibilità di predire ciò che prevede la Meccanica Quantistica mediante una qualsivoglia teoria a variabili nascoste locali. Una qualunque teoria a variabili nascoste, infatti, avrebbe come conseguenza il bound (10). Alternativamente si può ipotizzare l'esistenza di variabili nascoste, ma esse devono essere necessariamente non-locali.

Si deve notare che le correlazioni di un ipotetica descrizione a variabili nascoste possono essere ottenute solo attraverso le condizioni iniziali, ovvero molto prima dell'istante della misurazione. Infatti, in assenza di interazione, non si può stabilire alcuna correlazione fra eventi separati da un intervallo *space-like.* D'altra parte, ogni descrizione a variabili nascoste implica la possibilità di definire una distribuzione di probabilità congiunta-nel nostro caso $p(z_A, x_A, u_B, w_B)$ – in funzione delle variabili casuali che descrivono i risultati di tutte le possibili misurazioni fatte sui due spin, poichè *a priori* non sappiamo quale sarà la scelta della misurazione eseguita.

Nella derivazione del bound CHSH si sono fatte le due seguenti assunzioni:

1. Abbiamo assunto che i risultati misurati z_A, x_A, u_B, w_B hanno valori definiti precedentemente la misura, e quindi indipendentemente dal fatto che la misura stessa venga effettivamente eseguita. Questa assunzione è quella che comunemente viene denominata *realismo.*
2. Abbiamo assunto che non ci sia alcuna influenza fra la scelte di misurazione di Alice e i risultati visti da Bob (e viceversa). Questa assunzione è quello che comunemente si chiama *località.*

Il connubio delle due assunzioni assieme-implicito nell'esistenza della distribuzione di probabilità congiunta $p(z_A, x_A, u_B, w_B)$ – è generalmente detto *realismo locale.* In questo linguaggio, la conseguenza della violazione del bound CHSH è l'impossibilità del realismo locale.

Cosa dicevano Einstein Podolski e Rosen nel lavoro del 1935 [EPR35]? Facevano il seguente ragionamento, apparentemente innocuo e ovvio. Innanzitutto definivano i tre concetti: *elemento di realtà, principio di località* e *completezza di una teoria.*

Elemento di realtà: è un valore determinato preesistente la misurazione, e che si è in grado di predire con certezza prima che venga eseguita la misura. In sintesi: un valore oggettivo, esistente indipendentemente dall'atto della misurazione. Si può dire che la direzione dello spin, ovvero il valore ±1, è un elemento di realtà nel senso di Einstein? Senz'altro sì, in quanto se Alice misura nella stessa direzione di Bob ella sa qual'è il risultato che Bob otterrà, e lo sa anche prima che Bob esegua la sua misura (ovviamente in un opportuno sistema di riferimento). Se Alice ha trovato +1 sa che Bob troverà –1: il risultato per Bob è casuale, ma Alice lo sa prevedere: è quindi un elemento di realtà.

Principio di località: se due particelle non interagiscono per un intervallo di tempo finito Δt l'evoluzione di una particella non può influenzare l'evoluzione dell'altra. Anche questa è una affermazione molto innocente: se le due particelle non interagiscono, come può l'evoluzione dell'una a influenzare l'evoluzione dell'altra?

Completezza della teoria: una teoria è completa se è in grado di predire ogni elemento di realtà.

Conclusione di Einstein: Nell'esperimento del singoletto è sempre possibile dopo la misurazione sullo spin di Alice predire il risultato della misurazione nella stessa direzione sullo spin di Bob, e questo significa che il verso dello spin di Bob è un elemento di realtà, in quanto Alice è in grado di predirlo con certezza: è quindi una proprietà oggettiva della particella di Bob. Ma, d'altra parte la Meccanica Quantistica non può predire il verso dello spin misurato da Bob, e quindi è necessariamente incompleta, perchè ciò dimostra che esistono proprietà oggettive che non possono essere predette dalla teoria. Nell'argomento di Einstein questo suggerisce l'esistenza di una descrizione più dettagliata della natura – ad esempio basata su una tecnologia più avanzata attualmente non disponibile – secondo la quale tutte le predizioni probabilistiche diverrebbero deterministiche (ad esempio si potrebbe predire a priori la traiettoria seguita da un atomo di argento in un apparato di Stern-Gerlach). Una tale descrizione più dettagliata coinvolgerebbe gradi di libertà addizionali – le variabili nascoste. La teoria incompleta (ovvero quella priva della descrizione dettagliata) potrebbe solo fare predizioni statistiche, come nella descrizione del moto Browniano. La conclusione di Einstein Podolski e Rosen [EPR35] era che, pertanto, la Meccanica Quantistica doveva essere una teoria incompleta. Ma se Einstein avesse avuto ragione, allora le correlazioni delle ipotetiche variabili nascoste dovrebbero necessariamente soddisfare il bound CHSH (nonchè una numerosa serie di disuguaglianze di Bell), bound che, al contraio, è manifestamente violato. Questo dimostra che imporre proprietà oggettive non è il giusto punto di vista per studiare le leggi fisiche: *è l'assunzione realista il vero idealismo!*

Il ragionamento di Einstein Podolski e Rosen nel 1935 creò una situazione di crisi, la quale si avviò alla soluzione dopo ben trent'anni, quando John Bell dimostrò una disuguaglianza [Bel64] analoga a quella CHSH. Non è quindi la Meccanica Quantistica ad essere incompleta, bensì sono le assunzioni di Einstein che non sono condivisibili. Nell'esperimento del singoletto non si puòaffermare che esiste una realtà oggettiva preesistente che semplicemente viene letta con la misurazione, perchè una tale assunzione richiede di rinunciare alla località: non si può avere un realismo che allo stesso tempo sia locale. Ma allora, intuitivamente cosa succede? Posso pensare che è nell'atto stesso della misurazione che, in un certo senso, si "genera" il risultato. I possibili risultati sono "scritti" nello stato quantistico: ma per lo stato di singoletto qual'è lo il verdo dello spin della particella: su o giù? Per lo stato di singoletto non si può dire qual'è il verso dello spin della particella di Alice e quello dello spin della particella di Bob: lo stato si singoletto è una "sovrapposizione", in cui le particelle si scambiano fra loro i versi degli spino Quindi, quando si esegue una misurazione, il risultato dipende ovviamente dallo stato delle due particelle, ma non si può dire che si misura una proprietà della singola particella, o un valore preesistente. Fu questo l'errore di Einstein. Qualcuno potrebbe ancora preferire mantenere l'oggettività, rinunciando quindi alla località. Ma rinunciare alla località significa pagare un prezzo forse più alto, dovendo sostituire il metodo *riduzionistico* – alla base di tutta la scienza moderna – con un approccio di tipo *olistico*.

5 Lo stato GHZ

Vedremo ora come l'oggettività o realismo locale – ovvero la non pre-esistenza di proprietà misurate – sia in contraddizione con la Meccanica Quantistica, e possa essere messo in discussione sulla base di un puro ragionamento logico, senza la necessità di calcolare correlazioni. Questo ragionamento, dedotto da Mermin [Mer90] per un sistema a tre particelle, semplifica notevolmente un precedente ragionamento argomentato da Greenberger Horne e Zeilinger [GHZ89] per un sistema a quattro particelle. Il discorso di Mermin è il seguente.

Consideriamo il seguente stato a tre particelle

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle\otimes|+\rangle\otimes|+\rangle - |-\rangle\otimes|-\rangle\otimes|-\rangle). \tag{13}$$

Si verifica immediatamente che $|\Psi\rangle$ è autostato delle seguenti osservabili

$$\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}\,|\Psi\rangle = +|\Psi\rangle, \tag{14}$$

$$\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y}\,|\Psi\rangle = +|\Psi\rangle, \tag{15}$$

$$\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}\,|\Psi\rangle = +|\Psi\rangle, \tag{16}$$

$$\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}\,|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle, \tag{17}$$

e questo è consistente con il fatto che

$$(\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y})(\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y})(\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}) = -(\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}). \tag{18}$$

I quattro operatori commutano.

Il ragionamento EPR (Einstein Podolski Rosen) ora suonerebbe così. Su ogni particella noi potremmo misurare sia σ_x che σ_y, senza disturbare le altre particelle (località di Einstein). Denotiamo i risultati delle misurazioni con le variabili $m_x = \pm 1$ and $m_y = \pm 1$. Dalla (17) noi possiamo predire con certezza che se si misurano i tre σ_x, il risultato deve soddisfare

$$m_{1x}m_{2x}m_{3x} = -1, \tag{19}$$

quindi, ognuno degli operatori corrisponde a un elemento di realtà EPR, poichè il suo valore può essere predetto con certezza eseguendo misurazioni sulle altre due particelle distanti. Comunque, dall'equazione (14) segue anche che possiamo predire con certezza il valore di σ_{1x} misurando σ_{2y} e σ_{3y}, anzichè σ_{2x} e σ_{3x}. Abbiamo che

$$m_{1x}m_{2y}m_{3y} = +1. \tag{20}$$

dall'equazioni (15) e (16) abbiamo

$$m_{1y}m_{2x}m_{3x} = +1. \tag{21}$$

$$m_{1y}m_{2y}m_{3x} = +1. \tag{22}$$

Ma siccome $m_{l\alpha}^2 = 1$, il prodotto delle equazioni (20-22) risulta

$$m_{1x}m_{2x}m_{3y} = +1, \tag{23}$$

in aperta contraddizione con l'equazione (19)! Ora, l'assunzione di valori preesistenti ha condotto ad una contraddizione logica: dalla (19) e dalla (23) predico due valori opposti per il valore *oggettivo* di m_{1x}!

Nell'argomento GHZ non si utilizzano correlazioni, non c'è statistica: si tratta di un puro ragionamento logico, che porta semplicemente a concludere che la Meccanica Quantistica contraddice l'assunzione che la misura del verso di uno spin corrisponda alla lettura di un valore oggettivo preesistente. Ancora una volta possiamo affermare che la casualità non è di natura epistemica – ovvero mancanza di conoscenza, come pensava Einstein – ma è di natura ontica – ovvero è "intrinseca" nell'atto stesso della misurazione. Non c'è quindi modo di ipotizzare una realtà completamente oggettiva, e che lo sperimentatore si limita ad osservare, leggere: occorre creare un nuovo concetto di realismo e di oggettività. E non si tratta di speculazione metafisica, ma del risultato di un teorema matematico!

Contestualità. La tacita assunzione nell'argomento GHZ è che la variabile m_{1x} nell'equazione (19) è la stessa che nell'equazione (20), nonostante che questi due modi di ottenere m_{1x} coinvolgono esperimenti mutualmente esclusivi – ossia per misurare σ_{2x} e σ_{3x}, o per misurare invece σ_{2y} e σ_{3y}. Questa tacita assunzione non può essere verificata sperimentalmente, ovvero, come si dice, è di natura *controfattuale*. Questo è il punto chiave dove l'ipotesi di realismo locale contrasta l'apparato logico della Meccanica Quantistica. Si noti inoltre che le quattro osservabili (14-17) commutano, e quindi potrebbero essere misurate contestualmente nello stesso esperimento, e i relativi risultati soddiferebbero l'identità (18). Comunque, si badi che questo non significa affatto che la misura del prodotto di tre operatori di spin si ottiene eseguendo tre misurazioni separate di spin singolo, poichè l'esistenza stessa dello stato $|\Psi\rangle$ nell'equazione (13) – stato detto GHZ in onore dei tre inventori Greenberger, Horn, and Zeilinger – dimostra che la risoluzione spettrale del prodotto di operatori non è necessariamente fattorizzata, e gli autostati comuni del set dei quattro operatori commutanti a tre spin devono essere *entangled.*

In entrambi gli argomenti – violazione del bound CHSH e stato GHZ – abbiamo appreso che anche per osservabili che commutano il risultato della misura dipende dal *contesto,* ovvero dal fatto che l'osservabile è misurata da sola o congiuntamente con altre osservabili commutanti.

6 Riflessioni finali

L'*entanglement,* ovvero il fenomeno che produce correlazioni non locali-acausali, è l'ingrediente fondamentale della tecnologia attuale della cosiddetta Quantum Information [CN00], che sta alla base del principio di funzionamento della crittografia quantistica e del computer quantistico. L'interpretazione della Meccanica Quantistica utilizzata in questa lezione non è un interpretazione eretica, bensì è semplicemente l'interpretazione standard della scuola di Copenhagen di Niels Bohr. Inoltre, voglio rammentare che nell' argomento della violazione del bound CHSH sono correlazioni fisiche sperimentabili-non la loro l'interpretazione – che escludono l'oggettività o realismo locale. Abbiamo visto che se si vuole pensare a qualcosa di alternativo – ovvero a variabili nascoste, come nella meccanica Bohmiana [HP91, Cus94] – in realtà si deve rinunciare alla località, una rinuncia gravissima a livello metodologico, operativamente molto più limitante della rinuncia all'oggettività. In realtà bisogna sottolineare che non occorre rinunciare all'oggettività *tout* *court:* esistono infatti quantità oggettive preesistenti – le costanti del moto: la carica, la massa delle particelle, eccetera – le quali sono alla base della definizione stessa del sistema fisico sul quale la misurazione opera. Ma, al contempo, esistono anche misurazioni che non si possono considerare come lettura passiva di quantità oggettive preesistenti, altrimenti le correlazioni risultanti non violerebbero il bound CHSH. In tali misurazioni il realismo locale è anche in contraddizione con l'apparato logico della Meccanica Quantistica, in vista dell'argomento di Mermin sullo stato GHZ.

È ora innegabile che la riflessione sulla non località e il realismo eleva la Meccanica Quantistica ad uno *status* superiore a quello di teoria fisica. La Meccanica Quantistica non è solo una teoria fisica – come ad esempio l'elettrodinamica quantistica. La Meccanica Quantistica è – mi si conceda di affermare – il primo capitolo di un manuale di regole generali che riguardano una qualunque misurazione, e più in generale, un qualunque esperimento. La regola di Born – che associa le probabilità in una misurazione allo stato della particella – è una regola che vale per qualunque tipo di particella – sia essa elettrone, neutrino, protone, fotone, eccetera. A questo dobbiamo aggiungere che in ormai più di cento anni dalla scoperta di Plack, non abbiamo mai assistito ad un disaccordo sperimentale con la Meccanica Quantistica. Qualcuno potrebbe immaginare che in un futuro la Meccanica Quantistica potrà essere smentita: ma non si tratterà di una falsificazione concettualmente semplice. Infatti, è la prima volta che in Fisica abbiamo una teoria che parla dell'esperimento stesso: la Meccanica Classica non l'ha mai fatto, ha sempre assunto che tutto fosse misurabile in modo oggettivo, assegnando solo regole dinamiche e descrizioni funzionali dettagliate degli apparati, ma sempre con l'assunzione che le quantità di interesse si potessero misurare a piacimento. Invece, con l'avvento della Meccanica Quantistica, per la prima volta si affronta veramente *il problema della misurazione,* l'archetipo di *rapporto dell'osservatore con l'esterno,* alla base di una Teoria della Conoscenza. E ciò ci conduce paradossalmente alla situazione di non poter più assumere una realtà oggettiva. è molto difficile immaginare una nuova meccanica che smentisca completamente la Meccanica Quantistica, e non la contenga come caso particolare. D'altronde, se le correlazioni nonlocaliacausali sono un fatto sperimentale, allora, come abbiamo visto, è un teorema matematico che, qualunque sia la meccanica, essa non possa recuperare il realismo locale, come per la meccanica Bohmiana [HP91, Cus94]. Per recuperare l'oggettività bisogna rinunciare alla località.

Ma cosa dicono veramente gli esperimenti sull'esistenza di correlazioni non-locali-acausali fra particelle? Prima di tutto dobbiamo notare che nel parlare di non località bisogna essere molto rigorosi: bisogna verificare che le particelle, dal momento della loro separazione fino al raggiungimento dei due apparati di misura lontani non possano interagire fra loro, anche in linea di principio. Infatti, per preparare due particelle in uno stato entangled, esse in qualche momento devono necessariamente essersi trovate vicine per aver interagito: ad esempio si producono particelle entangled da un processo di decadimento, oppure in un mezzo ottico non lineare. Quando le particelle si allontanano si potrebbe pensare che in linea di principio esse conoscano già le direzioni di misura scelte da Alice e Bob, e per escludere questa possibilità occorre fare la verifica sperimentale in forma di *delayed choice*, ovvero la scelta della direzione di misura viene fatta dopo che le particelle si sono separate, mediante switch automatici ultraveloci. C'è inoltre un altro problema – questo tecnicamente molto più difficile – che inficia l'interpretazione nonlocale degli esperimenti correnti: il problema dell'*efficienza quantica*. In parole povere non si riesce mai a rilevare tutte le particelle entangled prodotte: quando le coppie entangled si separano, molte non arrivano ai rileva tori (per rivelarle tutte dovrei costruire rilevatori semisferici che raccolgano tutte le particelle emesse nei due semispazi). Inoltre, i processi di conversione a cascata nei rivelatori stessi non sono perfettamente efficienti. In presenza di particelle perdute si potrebbe immaginare un meccanismo, una forma di complotto delle particelle – come se fossero dei diavoletti di Maxwell – in maniera tale che al momento della misura alcune particelle evaderebbero la rivelazione in modo da violare il bound CHSH. Ciò in effetti, è possibile, e si è calcolato che gli esperimenti darebbero una prova inconfutabile della non località solo se l'efficienza quantica è superiore a un valore minimo $\eta_b \simeq 90\%$ (il valore preciso dipende dal tipo di disuguaglianza considerata e da altri fattori). In effetti, è possibile costruire modelli locali a variabili nascoste che riproducono perfettamente i dati sperimentali che violano il bound CHSH, a patto di rivelare una frazione di particelle $\eta < \eta_b$ [GG99]. Con la tecnologia attuale e gli esperimenti in fibra ottica ci si sta avvicinando sempre più al valore limite di η_b, limite che sarà presto valicato. Nessun fisico si aspetta comunque che la Meccanica Quantistica non sarà pienamente confermata.

Appendice: Derivazione del valore quantistico della correlazione CHSH

Occorre conoscere solo un po' di calcolo matriciale. Innanzitutto introduco una notazione che semplifica notevolmente i conti. Se si espande un vettore bipartito su due basi ortonormali – una per Alice e una per Bob – i coefficienti dell'espansione formano ovviamente una matrice, ovvero, ad esempio i coefficienti dell'espansione del vettore

$$|\Psi\rangle = \sum_{nm} C_{nm} |n\rangle \otimes |m\rangle, \tag{24}$$

formano la matrice $C = \{C_{nm}\}$. Conviene quindi mettere in corrispondenza i vettori bipartiti con operatori nel modo seguente

$$|A\rangle\rangle = \sum_{nm} A_{nm} |n\rangle \otimes |m\rangle \Leftrightarrow A = \sum_{nm} A_{nm} |n\rangle\langle m|. \tag{25}$$

Utilizzando l'ortogonalità delle basi $\{|n\rangle\}$ e $\{|m\rangle\}$ e la regola del prodotto fra matrici (linee per colonne) è immediato verificare le seguenti semplici regole

$$\begin{aligned} A \otimes B |C\rangle\rangle &= |ACB^\tau\rangle\rangle, \\ \langle\langle A | B \rangle\rangle &= \mathrm{Tr}[A^\dagger B], \end{aligned} \tag{26}$$

dove A^τ denota la trasposta di A nella base ortonormale che abbiamo scelto. Nella nostra notazione, lo stato di singoletto corrisponde (a meno di costante moltiplicativa) alla matrice di Pauli σ_y, ovvero

$$|\Psi\rangle \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} |\sigma_y\rangle\rangle. \tag{27}$$

Devo ora calcolare i valori di aspettazione nell'equazione (11). Allo scopo utilizzo la regola di Born: il valore aspettato di un osservabile è dato dall'elemento di matrice diagonale dell'osservabile sullo stato, ovvero, ad esempio, $\langle X \otimes W\rangle = \langle \Psi | X \otimes W | \Psi\rangle$. Sostituendo le definizioni delle osservabili X, Y, U, e W nell'aspettazione (11), vedo allora che devo solo saper calcolare gli elementi di matrice $\langle \Psi | \sigma_z \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp\sigma_z + \sigma_x) | \Psi\rangle$ e $\langle \Psi | \sigma_y \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp\sigma_z + \sigma_x) | \Psi\rangle$, i quali, utilizzando le nostre semplici regole (26) si calcolano rapidamente come segue

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\langle\langle \sigma_y | \sigma_z \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm\sigma_z + \sigma_x) | \sigma_y \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{Tr}[\sigma_y^\dagger \sigma_z \sigma_y (\pm\sigma_z + \sigma_x)^\tau] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{Tr}[\sigma_y \sigma_z \sigma_y (\pm\sigma_z + \sigma_x)] \\ &= \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{Tr}[I] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{28}$$

e, analogamente

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\langle\langle\sigma_y \,|\, \sigma_x \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\sigma_z+\sigma_x) \,|\, \sigma_y\rangle\rangle \\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Tr}[\sigma_y^{\dagger}\sigma_x\sigma_y(\pm\sigma_z+\sigma_x)^{\tau}] \\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Tr}[\sigma_y\sigma_x\sigma_y(\pm\sigma_z+\sigma_x)] \\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Tr}[I]=-\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Ora, mettendo assieme i vari termini, troviamo

$$\langle X\otimes W+Y\otimes W+Y\otimes U-X\otimes U\rangle=-2\sqrt{2}, \tag{30}$$

ovvero l'equazione (11).

Riferimenti bibliografici

[Bel64] J.S. Bell. On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics*, 1:195-200, 1964. (ristampato nel volume [Bel87]).

[Bel66] J.S. Bell. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Modern Phys.*, 38:447-452, 1966.

[Bel87] J.S. Bell. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[CHSH69] J.F. Clauser, M.A. Home, A. Shimony, and R.A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880-884, 1969.

[CN00] I.L. Chuang and M.A. Nielsen. *Quantum Information and Quantum Computation*. Cambridge University Press, Cambridge UK, 2000.

[Cus94] J.T. Cushing. *Quantum Mechanics: Historical contingency and the Copenhagen hegemony*. University of Chicago Press, London, 1994.

[EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777-780, 1935.

[GG99] N. Gisin and B. Gisin. A local hidden variable model of quantum correlation exploiting the detection loophole. 260:323-327, 1999.

[GHZ89] D. Greenberger, M. Horne, and A. Zeilinger. *Going beyond Bell's theorem*, pages 69-72 in Volume [Kaf89], 1989.

[HP91] B.J. Hiley and F. David Peat, editors. Quantum Implications. Routledge, London and New York, 1991.

[Kaf89] M. Kafatos, editor. *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1989.

[Mer90] N.D. Mermin. What's wrong with these elements of reality? *Phys. Today*, 43:9-11, 1990.

Nota

[1] Si deve notare che il termine *causale* in uso nella letteratura per descrivere le correlazioni non è in realtà connesso con l'interpretazione causale della correlazione stessa, ma significa semplicemente che la correlazione può essere utilizzata per stabilire una comunicazione.