

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Misurazione Quantistica</b>	<b>7</b>
1.1 POVM e strumento . . . . .	7
1.1.1 POVM e statistica di una misurazione . . . . .	7
1.1.2 Strumento e riduzione di stato ( <i>state reduction</i> ) . . . . .	10
1.2 Elementi di teoria delle rappresentazioni dei gruppi . . . . .	13
1.2.1 Esempio di gruppo discreto: $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ . . . . .	17
1.2.2 Esempio di gruppo continuo: $SU(2)$ e i suoi stati coerenti .	17
1.3 Stima e POVM covarianti . . . . .	23
1.3.1 Il caso di rappresentazione irriducibile di gruppo compatto	25
1.3.2 Esempio di stima covariante: orientazione di uno spin . . .	25
<b>2 Modelli di realizzazione di misurazioni</b>	<b>29</b>
2.1 Modello di von Neumann . . . . .	29
2.2 Modello di Arthurs-Kelly . . . . .	31
2.3 Misurazione direzione momento angolare . . . . .	34
<b>3 Misurazioni di Bell</b>	<b>41</b>
3.1 Preliminari . . . . .	41
3.2 Entanglement . . . . .	43
3.2.1 Proprietà degli stati massimamente entangled . . . . .	46
3.2.2 Alcune applicazioni dell'entanglement . . . . .	48
3.3 Teletrasporto . . . . .	50
3.3.1 Il teletrasporto di Bennett, Brassard, Crepeau, Jozsa, Peres, Wootters . . . . .	51
3.3.2 Schema generale del teletrasporto con entanglement massi- male . . . . .	52
3.4 Misurazioni di Bell: il caso ortogonale e quello covariante . . . . .	54

3.4.1	Il protocollo BBCJPW e il gruppo $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ . . . . .	55
3.4.2	Il teletrasporto di Braunstein e Kimble: il gruppo di Weyl-Heisenberg . . . . .	56
3.4.3	Esempio di POVM covariante overcompleta: $SU(2)$ . . . . .	58
3.5	Osservabili di Bell . . . . .	59
3.6	Operazioni quantistiche reversibili e teletrasporto . . . . .	62
3.7	Robustezza teletrasporto . . . . .	65
	<b>Conclusioni</b>	<b>69</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>70</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>73</b>

# Introduzione

I recenti sviluppi della Fisica teorica quantistica sono preludio ad una nuova rivoluzione tecnologica che farà affidamento su dispositivi quantistici. Questi sfrutteranno proprietà quantistiche della natura che non hanno analogo classico: il principio di sovrapposizione e soprattutto l'entanglement.

Teletrasporto, *quantum computer*, comunicazione quantistica e crittografia quantistica sono solo alcuni dei frutti del lavoro svolto in questi ultimi anni nel settore della teoria dell'informazione quantistica. Questa linea di ricerca sta gettando le basi teoriche per la futura progettazione di macchine quantistiche.

Per capire le enormi possibilità offerte dal mondo quantistico, è sufficiente pensare alla potenza di un calcolatore quantistico: sfruttando quello che viene chiamato "parallelismo intrinseco", problemi classicamente risolubili in tempi esponenzialmente grandi in funzione della dimensione dell'*input*, con un *quantum computer* possono essere risolti in tempo polinomiale. L'impatto che un simile salto di qualità avrebbe su una società sempre più bisognosa di potenza di calcolo sarebbe enorme. Per esempio, un quantum computer potrebbe facilmente violare gli algoritmi di crittazione attualmente in uso e l'unico rimedio sarebbe proprio la crittografia quantistica.

Nella realizzazione pratica di tutte queste nuove idee si incontrano numerosi ostacoli. Progettare un apparato sperimentale che sia il più possibile ideale e controllabile è davvero difficile, soprattutto quando si ha a che fare con la manipolazione di oggetti quantistici, i quali per loro natura sono assai sensibili alla minima interazione con il mondo circostante. Proprio per questo si stanno cercando schemi teorici che risultino il più possibile robusti alle non idealità delle realizzazioni sperimentali.

Si capisce quanto sia aperto e vasto il campo della ricerca in questo settore: ricerca teorica e, negli ultimi anni, anche sperimentale. Questa tesi comunque tratta solo aspetti teorici, ed è nata con l'intento di individuare classi di misurazioni che consentano la realizzazione del teletrasporto di sistemi complessi.

Nel primo capitolo viene esposto il lessico di base della teoria della misurazione quantistica: POVM (*positive operator valued measure*) e “strumento”, oggetti dei quali la meccanica quantistica moderna non può fare a meno. L’introduzione delle POVM consente di definire, per esempio, misurazioni in presenza di risoluzione sperimentale finita, misurazioni congiunte di osservabili non commutanti e stima di parametri non associati ad alcuna osservabile. Lo “strumento” associato ad una misurazione determina la riduzione di stato che si ha sul sistema sottoposto a misurazione.

A seguire, è presentata sinteticamente la teoria delle rappresentazioni dei gruppi con alcuni importanti risultati di rilievo che saranno utilizzati in seguito. L’uso dei gruppi in Fisica ha sempre condotto a sintesi chiarificatrici, e in questo caso ha consentito di risolvere problemi non banali e di porre i risultati in forma semplice e compatta. Gli esempi dei gruppi  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  e  $SU(2)$  sono illustrati in funzione di un loro successivo impiego.

A chiudere il capitolo, si accenna alla teoria quantistica della stima, restringendo l’attenzione al problema della stima covariante.

Nel secondo capitolo vengono riportati i modelli di realizzazione delle misurazioni della quadratura del campo elettromagnetico e della misurazione congiunta di due quadrature coniugate. Questi sono esempi di come l’uso delle POVM consenta di descrivere misurazioni in presenza di risoluzione sperimentale finita e misurazioni congiunte di osservabili non commutanti.

Come ultimo modello di misurazione viene presentato il primo schema di misurazione congiunta delle tre componenti del momento angolare mediante la POVM degli stati coerenti del gruppo  $SU(2)$ . Quest’ultima è anche la POVM ottimale per la stima covariante dell’orientazione di uno spin. La realizzazione di questa POVM è di interesse anche per questioni riguardanti il teletrasporto: infatti la sua realizzazione aprirebbe la strada alla progettazione di nuovi tipi di teletrasporto recentemente proposti.

Nel terzo capitolo viene introdotto un nuovo semplice formalismo per gli stati dei sistemi composti, basato sull’elementare algebra delle matrici. Si ridefinisce l’entanglement attraverso la forma di Schmidt dello stato riportando quindi la definizione del grado di entanglement per stati puri. Segue poi la caratterizzazione degli stati massimamente entangled come gli unici stati invarianti sotto l’azione di opportune trasformazioni unitarie locali. Come esempio di applicazione dell’entanglement viene riportato un protocollo quantistico di distribuzione di chiavi segrete e il teorema di “non clonazione” dello stato.

Dopo aver presentato il primo schema di teletrasporto di Bennett, Brassard,

Crepeau, Jozsa, Peres e Wootters (BBCJPW), se ne mostra il funzionamento, introducendo quindi le misurazioni di Bell. Quest'ultime possono essere generate facendo uso di rappresentazioni irriducibili di gruppi. Infatti, il protocollo BBCJPW discende dal gruppo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , e può essere generalizzato al teletrasporto per uno spazio di Hilbert N-dimensionale con il gruppo  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ . Un successivo schema proposto e realizzato da Braunstein e Kimble viene invece derivato utilizzando il gruppo di Weyl-Heisenberg. Infine si presenta il teletrasporto associato al gruppo  $SU(2)$ , il primo esempio generato da un gruppo non abeliano. Proprio in vista della realizzazione sperimentale di quest'ultimo teletrasporto si è cercato di realizzare la POVM data dagli stati coerenti del gruppo  $SU(2)$ .

Viene quindi data una espressione per le osservabili di Bell associate ai gruppi  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  e  $WH$ , che nel secondo caso consente di ritrovare l'osservabile effettivamente misurata nell'esperimento sul teletrasporto di Braunstein e Milburn.

Attraverso il formalismo delle operazioni quantistiche, facendo uso della notazione introdotta per l'entanglement, si dimostra che gli unici schemi che funzionino per preparazione pura dell'entanglement e per misurazioni a valore in proiettori sono gli schemi con entanglement massimale.

Per finire, viene dimostrata la robustezza degli schemi di teletrasporto alla non massimalità dell'entanglement. Nel caso di teletrasporto di un qubit, viene trovata la relazione che lega la *fidelity* minima alla matrice che descrive lo stato entangled.



# Capitolo 1

## Misurazione Quantistica

In questo capitolo verranno forniti gli strumenti necessari alla lettura del lavoro: dalla descrizione di una misurazione quantistica e dell'effetto che una sua realizzazione ha sul sistema in esame, si passerà ad un breve excursus sulla teoria delle rappresentazioni dei gruppi, per terminare con l'esposizione del problema della stima quantistica covariante, come esemplificazione di quanto precedentemente presentato.

### 1.1 POVM e strumento

#### 1.1.1 POVM e statistica di una misurazione

Considerato un sistema quantistico  $S$ , descritto nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_S$ , si definisce semiosservabile di  $S$  a valori in uno spazio di Borel  $(\Sigma, \mathcal{B})$  una misura di  $\Sigma$  a valori negli operatori positivi (POVM)  $\Pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$  tale che  $\Pi(\Sigma) = \mathbb{1}$ . La POVM  $\Pi$  soddisferà quindi le seguenti proprietà:

$$\Pi(\emptyset) = 0, \quad \Pi(A) \geq 0, \quad \Pi(\Sigma) = \mathbb{1}, \quad \Pi(\cup_i A_i) = \sum_i \Pi(A_i); \quad (1.1)$$

con  $A, A_i \in \mathcal{B}$  e  $A_i$  disgiunti.

Fornire la descrizione meccanico-quantistica di una misurazione equivale a darne la statistica dei possibili risultati in funzione dello stato in cui si trova il sistema. Tale funzione deve propagare linearmente le combinazioni lineari convesse di stati nelle medesime combinazioni delle statistiche relative agli stati combinati.

Ogni misurazione che ammetta risultati nello spazio di Borel  $(\Sigma, \mathcal{B})$  è in corrispondenza biunivoca con una semiosservabile  $\Pi$  a valori in questo stesso spazio,

dove la relazione che lega la statistica dei risultati alla POVM è la cosiddetta regola di Born o regola della traccia:

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad P(x \in A | \rho_S) = \text{Tr}[\rho_S \Pi(A)]. \quad (1.2)$$

Il fatto che  $P$  sia una probabilità è assicurato dalle proprietà di cui gode  $\Pi$ , la corretta propagazione delle combinazioni di stati è invece dovuta alla linearità della traccia.

Nel caso in cui la POVM abbia valori in proiettori ortogonali, anziché in generici operatori positivi, la relazione precedente si riconduce alla ben nota statistica della misurazione di un'osservabile convenzionale del sistema  $S$ , ovvero di un operatore autoaggiunto di  $\mathcal{H}_S$ , con spettro  $\Sigma$  e famiglia spettrale  $\Pi$ . Tipico esempio è il caso in cui  $\Sigma \equiv \mathbb{R}^n$  con l'usuale topologia: grazie alla teoria spettrale si identifica l'osservabile associata a  $\Pi$  con il set di operatori autoaggiunti commutanti  $(O_1 \cdots O_n)$  definiti da:

$$O_i = \int_{\mathbb{R}} \lambda \Pi(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times d\lambda \times \cdots \times \mathbb{R}).$$

Altro esempio ancor più semplice è quello della misurazione del numero di fotoni di un modo di radiazione:

$$\Sigma = \mathbb{N}, \quad \Pi(n) = |n\rangle\langle n|, \quad O = \sum_n n \Pi(n).$$

Dal momento che le osservabili costituiscono un ridotto sottoinsieme delle semiosservabili, ci si chiede cos'altro sia contemplato in queste ultime. In un suo lavoro, Masanao Ozawa [1] ha dimostrato che per ogni semiosservabile  $\Pi$  su  $\mathcal{H}_S$  esistono uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_P$ , uno stato puro  $|\varphi\rangle_P$  di  $\mathcal{H}_P$ , un operatore unitario  $U$  di  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P$ , una osservabile di  $P$  con il medesimo spettro di  $\Pi$  e famiglia spettrale  $E_P$ , tali che:

$$\begin{aligned} P(x \in A | \rho_S) &= \text{Tr}_{SP}[U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)] = \\ &= \text{Tr}_S \left[ \rho_S \text{Tr}_P [\mathbb{1}_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A) U] \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dal terzo termine dell'equazione precedente si comprende come ogni misurazione su  $S$  possa essere realizzata ponendo  $S$  in interazione con un altro sistema  $P$ , opportunamente scelto e preparato, ed eseguendo su quest'ultimo la misurazione di una osservabile.

Viceversa, ogni volta che si procederà con una misurazione indiretta (cioè secondo lo schema appena illustrato), la statistica dei risultati sarà ricavabile

in termini di soli operatori sul sistema  $S$  in esame tramite la POVM calcolata eseguendo la traccia parziale sullo spazio di Hilbert dell'apparato ( $P$ , *probe*):

$$\Pi(A) = \text{Tr}_P[\mathbb{1}_S \otimes |\varphi\rangle_{PP}\langle\varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A) U]. \quad (1.4)$$

Oltre al lavoro di Ozawa, va menzionato il teorema di Naimark [2], il quale assicura che per ogni semiosservabile  $\Pi$  a spettro discreto esiste uno spazio  $\mathcal{H}_P$ , uno stato  $|\varphi\rangle_P$  di  $\mathcal{H}_P$ , una osservabile di  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P$  con il medesimo spettro e misura spettrale  $E_{SP}$  tale che,  $\forall x_i \in \Sigma$ :

$$\begin{aligned} P(x_i | \rho_S) &= \text{Tr}_S[\rho_S \Pi(x_i)] = \\ &= \text{Tr}_{SP}[\rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP}\langle\varphi| E_{SP}(x_i)] = \\ &= \text{Tr}_S\left[\rho_S \text{Tr}_P[\mathbb{1}_S \otimes |\varphi\rangle_{PP}\langle\varphi| E_{SP}(x_i)]\right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

da cui

$$\Pi(x_i) = \text{Tr}_P[\mathbb{1}_S \otimes |\varphi\rangle_{PP}\langle\varphi| E_{SP}(x_i)]. \quad (1.6)$$

Si potrebbero riassumere queste considerazioni dicendo che per ogni statistica esiste uno schema di misurazione [ $\mathcal{H}_P$ ,  $|\varphi\rangle_P$ ,  $U$ ,  $E_P$ ] che la realizzi e che l'ignorare l'apparato di misurazione o una parte di sistema (cioè tracciando parzialmente su di essi) dà luogo ad una semiosservabile su  $S$ .

L'introduzione delle semiosservabili è necessaria per descrivere misurazioni non ideali, eseguite in presenza di risoluzione sperimentale. Tipico esempio in ottica quantistica è la misurazione del numero di fotoni di un modo di radiazione  $v$ : nel caso ideale si ha a che fare con l'osservabile

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle\langle n|,$$

ma nella pratica essa è correttamente descritta dalla POVM

$$\Pi_\eta = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \eta^n (1-\eta)^{k-n} |k\rangle\langle k|,$$

dove  $\eta$  è un parametro reale compreso tra 0 e 1, detto efficienza quantica del rivelatore (cfr. [10],[8],[9]).

Questa POVM può essere vista come il risultato di una misurazione eseguita da un rivelatore ideale preceduto da un *beam splitter* di trasmissività  $\eta$ , il quale fa interagire  $v$  con un'altro modo di radiazione  $u$  preparato in uno stato di vuoto. La traccia parziale sul modo  $u$  fornisce la relazione:

$$\Pi_\eta(n) = \text{Tr}_u[\mathbb{1}_v \otimes |0\rangle_{uu}\langle 0| U_\eta^\dagger |n\rangle_{vv}\langle n| \otimes \mathbb{1}_u U_\eta].$$

Altra importante situazione in cui è manifesta l'utilità delle semiosservabili è la descrizione di una misurazione congiunta di osservabili non commutanti. Per fare un esempio, si supponga di avere due osservabili  $O_1$  e  $O_2$  le quali possono scriversi sulla "base" di una POVM discreta  $\Pi$ :

$$O_1 = \sum_{i \in \Sigma} f_1(i) \Pi(i), \quad O_2 = \sum_{i \in \Sigma} f_2(i) \Pi(i).$$

Calcolandone i valori medi si ottiene:

$$\langle O_1 \rangle = \sum_{i \in \Sigma} f_1(i) \langle \Pi(i) \rangle, \quad \langle O_2 \rangle = \sum_{i \in \Sigma} f_2(i) \langle \Pi(i) \rangle.$$

Essendo  $\langle \Pi(i) \rangle = \text{Tr}[\rho \Pi(i)] = P(i | \rho)$ , dalla misurazione della semiosservabile  $\Pi$  si possono ricostruire i valori d'aspettazione di  $O_1$  e  $O_2$ . Il prezzo da pagare nella misurazione simultanea è il cosiddetto rumore aggiunto che deriva dal fatto che

$$O^2 \neq \sum_{i \in \Sigma} f^2(i) \Pi(i),$$

perché in generale  $\Pi(i)\Pi(j) \neq \Pi(i)$ , diversamente dal caso in cui  $\Pi$  è a valori in proiettori ortogonali.

La misurazione eterodina è un'applicazione pratica di questa idea: essa realizza la misurazione congiunta di due quadrature coniugate di un modo di radiazione, le quali non commutano (crf. [10]).

Un'altra applicazione delle POVM è la possibilità di definire la stima di un parametro al quale non corrisponde alcuna osservabile, come ad esempio la fase del campo di un modo di radiazione. Di questo particolare tipo di problemi si occupa la teoria della stima quantistica, accennata a fine capitolo nel caso della stima covariante.

### 1.1.2 Strumento e riduzione di stato (*state reduction*)

Dato uno schema di misurazione  $[\mathcal{H}_P, |\varphi\rangle_P, U, E_P]$  di una semiosservabile è possibile ricavare, usando l'inferenza statistica, la riduzione di stato. Per fare questo non sarà sufficiente dare la POVM, perché questa non contiene informazione sul modo con cui viene effettuata la misurazione e di conseguenza sulla riduzione di stato a questa dovuta.

Supponendo di realizzare lo schema  $[\mathcal{H}_P, |\varphi\rangle_P, U, E_P]$  la relativa probabilità si scrive:

$$P(x \in A | \rho_S) = \text{Tr}_{SP}[U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger \mathbf{1}_S \otimes E_P(A)].$$

Se immediatamente dopo questa misurazione (ma anche prima o simultaneamente) se ne effettua un'altra su  $S$  relativa ad una POVM ortogonale  $E_S$  con spettro  $\Theta$ , la probabilità congiunta di avere per la prima un risultato  $x \in A \subset \Sigma$  e per la seconda un risultato  $y \in B \subset \Theta$  sarà:

$$\begin{aligned} P(x \in A, y \in B) &= Tr_{SP}[U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{pp} \langle \varphi| U^\dagger E_S(B) \otimes E_P(A)] = \\ &= P(y \in B | x \in A) P(x \in A) = \\ &= Tr_S[\rho_A E_S(B)] Tr_S[\rho_S \Pi(A)], \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove  $\rho_A$  rappresenta lo stato ridotto, cioè lo stato che si inferisce grazie alla lettura del risultato della misura su  $P$ . Questa relazione deve essere valida per qualunque misurazione su  $S$ , quindi si ottiene:

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle \psi | \rho_A | \psi \rangle = \frac{Tr_{SP}[U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger |\psi\rangle \langle \psi| \otimes E_P(A)]}{Tr_{SP}[U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)]}.$$

Di qui, sapendo che  $\rho_A$  deve essere positivo a traccia 1, quindi con autovalori limitati tra 0 e 1, si possono trovare autovalori e autovettori di  $\rho_A$  con uno schema di massimizzazione: il massimo di  $\langle \psi | \rho_A | \psi \rangle$  al variare di  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$  normalizzato, sarà il massimo degli autovalori e verrà raggiunto in corrispondenza dell'autovettore  $|\psi_{max}\rangle$ ; ripetendo la massimizzazione al variare di  $|\psi\rangle$  in  $\mathcal{H}_S \setminus span(|\psi_{max}\rangle)$  si troveranno l'autovalore e l'autovettore successivi, e così via.

Quindi le relazioni precedenti definiscono completamente  $\rho_A$ . Scegliendo  $|\psi_i\rangle$  come gli autovettori di  $\rho_A$  si può scrivere:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_i \langle \psi_i | \rho_A | \psi_i \rangle |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \\ &= \sum_i \frac{Tr_S \left[ |\psi_i\rangle \langle \psi_i| Tr_P [U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)] \right]}{Tr_{SP} [U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{pp} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)]} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \\ &= \frac{Tr_P [U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)]}{Tr_{SP} [U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)]} = \\ &= \frac{I_A(\rho_S)}{Tr_S [I_A(\rho_S)]}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

dove  $I_A(\rho_S) = Tr_P [U \rho_S \otimes |\varphi\rangle_{pp} \langle \varphi| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)]$  è uno "strumento".

Uno strumento su  $\mathcal{H}_S$  è in generale una misura di uno spazio di Borel  $(\Sigma, \mathcal{B})$  a valore nelle mappe lineari da operatori classe traccia in operatori classe traccia di  $\mathcal{H}_S$ , tale che, per  $A$  e  $A_i \in \mathcal{B}$  e  $A_i$  disgiunti, rispetti le seguenti proprietà,  $\forall \rho$  di  $\mathcal{H}_S$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq Tr [I_A(\rho)] \leq 1, \quad Tr [I_\Sigma(\rho)] = 1, \quad Tr [I_{\cup_i A_i}(\rho)] = \sum_i Tr [I_{A_i}(\rho)], \\ I_A \text{ è una mappa completamente positiva.} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dato uno strumento si dà automaticamente una riduzione di stato e una POVM con spettro  $\Sigma$ , infatti  $\forall \rho_S$ :

$$\rho_S \rightarrow \rho_A = \frac{I_A(\rho)}{\text{Tr}[I_A(\rho)]}, \quad \text{Tr}[\rho_S \Pi(A)] = \text{Tr}[I_A(\rho_S)].$$

Ozawa ha dimostrato in [1] che ogni strumento è realizzabile mediante uno schema di misurazione  $[\mathcal{H}_P, \sigma_P, U, E_P]$ , con  $\sigma_P = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle_{PP} \langle \varphi_i|$ , per il quale:

$$\begin{aligned} I_A(\rho_S) &= \text{Tr}_P[U \rho_S \otimes \sigma_P U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes E_P(A)] = \\ &= \sum_i p_i \text{Tr}_P \left[ U \rho_S \otimes |\varphi_i\rangle_{PP} \langle \varphi_i| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes \int_A E_P(dx) \right] = \\ &= \int_A \sum_i \Omega_i(x) \rho_S \Omega_i^\dagger(x) dx, \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove

$$\Omega_i(x) = \sqrt{p_i} {}_P \langle x|U|\varphi_i\rangle_P. \quad (1.11)$$

La POVM determinata da questo strumento può essere scritta come:

$$\Pi(A) = \int_A \sum_i \Omega_i^\dagger(x) \Omega_i(x) dx. \quad (1.12)$$

Nel caso di spettro discreto gli integrali sono sostituiti da somme, mentre nel caso di spettro continuo  $E_P(dx) = |x\rangle \langle x| dx$  sono proiettori su stati non normalizzabili. Quando  $\sigma_P = |\varphi\rangle_{PP} \langle \varphi|$  lo strumento è detto puro, poiché, scomparendo la somma sull'indice  $i$ , resta un solo  $\Omega(x)$  e quindi, fissato il risultato  $x$ , stati puri sono mappati in puri.

La richiesta di completa positività dello strumento (ovvero di tutte le mappe del tipo  $I_A$ , con  $A \in \mathcal{B}$ ) è una richiesta di realizzabilità fisica. Infatti, per un sistema composto da  $S$  e  $S'$ , con  $S$  sottoposto a misurazione, la riduzione dello stato vista dal sistema composto sarà una triviale estensione dello strumento su  $S$ :

$$I_A^{SS'}(\rho_{SS'}) = \left( I_A^S \otimes Id^{S'} \right) (\rho_{SS'}),$$

dove  $Id^{S'}$  è la mappa identica sul sistema  $S'$ . La completa positività assicura pertanto che lo strumento sul sistema composto dia ancora uno stato, ovvero sia a tutti gli effetti uno strumento. Si può dimostrare che una mappa lineare positiva  $M$  che non aumenti la traccia è completamente positiva se e solo se per ogni sequenza finita di vettori  $\{|v_k\rangle\}$ ,  $\{|w_k\rangle\}$  con  $k = 1 \dots n$  si ha:

$$\sum_{k,l=1}^n \langle v_k | M(|w_k\rangle \langle w_l|) |v_l\rangle \geq 0. \quad (1.13)$$

Una esemplificazione dell'uso degli strumenti è rimandata ai capitoli successivi.

Per concludere, va sottolineato il fatto che una POVM può corrispondere a tanti strumenti diversi. Ad esempio è sufficiente fare la sostituzione  $\Omega(x) \rightarrow V(x)\Omega(x)$  con  $V(x)$  unitario per cambiare strumento, pur mantenendo invariata la POVM. Infine, sia POVM che strumenti ammettono diverse realizzazioni unitarie.

## 1.2 Elementi di teoria delle rappresentazioni dei gruppi

Un gruppo  $\mathbf{G}$  è un insieme dotato di una legge di composizione interna binaria che soddisfa le seguenti proprietà:

- associativa:  $\forall a, b, c \in \mathbf{G}$

$$a(bc) = (ab)c \quad (1.14)$$

- esistenza elemento neutro:  $\exists e \in \mathbf{G}$  tale che  $\forall a \in \mathbf{G}$

$$ea = ae = a \quad (1.15)$$

- esistenza dell'elemento inverso:  $\forall a \in \mathbf{G}$

$$\exists a^{-1} \text{ tale che } aa^{-1} = a^{-1}a \quad (1.16)$$

È molto semplice dimostrare l'unicità dell'elemento neutro e dell'elemento inverso.

Una rappresentazione di un gruppo  $\mathbf{G}$  su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  sui complessi è un omomorfismo  $T : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ , ovvero è una mappa che associa ad ogni elemento del gruppo un operatore sullo spazio vettoriale in modo che la struttura del gruppo sia preservata:

$$g_1, g_2 \in \mathbf{G}, T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2). \quad (1.17)$$

Uno spazio vettoriale  $V$  che supporti una rappresentazione di un gruppo  $\mathbf{G}$  è detto  $\mathbf{G}$ -modulo.

Due rappresentazioni  $T_1, T_2$  dello stesso gruppo su  $V$   $n$ -dimensionale si dicono equivalenti se esiste un operatore invertibile  $S$  su  $V$  tale che:

$$\forall g \in \mathbf{G}, T_2(g) = ST_1(g)S^{-1}.$$

Questa è una relazione di equivalenza.

Una rappresentazione  $T$  su  $V$  di un gruppo  $\mathbf{G}$  è detta riducibile se ammette sottospazi di  $V$  invarianti per l'azione di tutti gli elementi del gruppo; se  $V$  può essere decomposto in una somma diretta di sottospazi invarianti minimali, che cioè non contengano altri sottospazi invarianti, la rappresentazione è detta completamente riducibile. Ogni restrizione della rappresentazione  $T$  a ciascuno dei sottospazi invarianti minimali è irriducibile, in quanto non ammette sottospazi invarianti.

È molto importante poter dare una misura sul gruppo  $\mathbf{G}$ , perché questo permette di definire l'integrazione sugli elementi del gruppo. Una misura  $\mu$  sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}(\mathbf{G})$  degli aperti di  $\mathbf{G}$  è detta left (right) invariante se

$$\mu(gA) = \mu(A), \quad (\mu(Ag) = \mu(A)) \quad g \in \mathbf{G}, \quad A \in \mathcal{A}(\mathbf{G}).$$

Un gruppo che ammetta una misura invariante sia a destra che a sinistra è detto unimodulare. In generale la misura di tutto il gruppo non è finita. Nel caso di gruppi finiti o compatti esiste una misura invariante che sia finita sul gruppo, la quale può essere scelta normalizzata, cioè che tale che  $\mu(\mathbf{G}) = 1$ .

Per gruppi unimodulari a misura finita si dimostra che ogni rappresentazione è equivalente ad una rappresentazione unitaria, la quale risulta essere completamente riducibile. Oltre alle rappresentazioni unitarie di un gruppo  $\mathbf{G}$  si definiscono anche le sue rappresentazioni proiettive unitarie per le quali si ha:

$$U_{g_1}U_{g_2} = \omega(g_1, g_2)U_{g_1g_2}$$

dove  $U_g^{-1} = U_g^\dagger$ ,  $|\omega(g_1, g_2)|=1$  e i cosiddetti cocicli soddisfano le seguenti proprietà:

$$\omega(g_1g_2, g_3)\omega(g_1, g_2) = \omega(g_1, g_2g_3)\omega(g_2, g_3),$$

$$\omega(g, g^{-1}) = \omega(g, e) = 1.$$

L'importanza delle UIR (rappresentazioni unitarie irriducibili, anche proiettive) di un gruppo risiede in due lemmi dimostrati da Schur estensivamente usati in Fisica, come del resto in questo lavoro.

*Primo lemma di Schur.*

Sia  $U$  UIR del gruppo  $\mathbf{G}$  sullo spazio vettoriale  $V$  e  $B \in \mathcal{L}(V)$ . Allora

$$BU_g = U_gB, \quad \forall g \in \mathbf{G} \implies B = \lambda \mathbf{1}_V. \quad (1.18)$$

*Secondo lemma di Schur.*

Siano  $U_1$  e  $U_2$  due UIR inequivalenti del gruppo  $\mathbf{G}$ , date rispettivamente sugli spazi vettoriali  $V$  ed  $W$ , e  $B : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare da  $V$  in  $W$ . Segue che

$$BU_2(g) = U_1(g)B, \quad \forall g \in \mathbf{G} \implies B = \mathbf{0}. \quad (1.19)$$

Per la teoria delle rappresentazioni dei gruppi si faccia riferimento al testo del Jones [3].

Per le UIR di un gruppo unimodulare vale la cosiddetta “regola della traccia”, relazione che consente di eseguire calcoli in modo elegante e sintetico. Merita di essere dimostrata come esempio delle tecniche di cui si farà presto uso.

Sia  $U$  una UIR di  $\mathbf{G}$  unimodulare su  $V$ . Scelto un vettore  $|v\rangle \in V$  normalizzato, per il primo lemma di Schur si ha che:

$$B = \int_G U_g |v\rangle \langle v| U_{g^{-1}} \mu(dg) = \lambda_v \mathbb{1}_V. \quad (1.20)$$

Infatti, per ogni  $h \in \mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} U_h B &= \int_G U_h U_g |v\rangle \langle v| U_g^\dagger \mu(dg) = \int_G U_{hg} |v\rangle \langle v| U_g^\dagger \mu(dg) = \\ &= \int_G U_g |v\rangle \langle v| U_{h^{-1}g}^\dagger \mu(d(h^{-1}g)) = \int_g U_g |v\rangle \langle v| U_g^\dagger \mu(dg) U_h = \\ &= B U_h. \end{aligned}$$

La costante  $\lambda_v$  che compare nella (1.20) in realtà non dipende dal vettore  $|v\rangle$  scelto. Infatti, sia  $|u\rangle \in V$  un vettore normalizzato:

$$\begin{aligned} \lambda_v &= \langle u | \int_G U_g |v\rangle \langle v| U_{g^{-1}} \mu(dg) |u\rangle = \int_G |\langle u | U_g |v\rangle|^2 \mu(dg) = \\ &= \langle v | \int_G U_g |u\rangle \langle u| U_{g^{-1}} \mu(dg) |v\rangle = \lambda_u, \end{aligned} \quad (1.21)$$

dove nell’ultima riga si è usato il cambio di variabile  $g \rightarrow g^{-1}$ .

Si scelga ora una normalizzazione della misura del gruppo tale che  $\lambda = 1$ , e una base di vettori ortogonali  $\{|i\rangle\}$ . Sempre per il primo lemma di Schur si ha che:

$$B' = \int_G U_g |i\rangle \langle j| U_{g^{-1}} \mu(dg) = \lambda_{ij} \mathbb{1}_V,$$

dove  $\lambda_{ij}$  si può ricavare nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \text{Tr} \left[ \lambda_{ij} \mathbb{1} |v\rangle \langle v| \right] = \text{Tr} \left[ \int_G U_g |i\rangle \langle j| U_{g^{-1}} \mu(dg) |v\rangle \langle v| \right] \\ &= \text{Tr} \left[ |i\rangle \langle j| \right] = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

A questo punto, per linearità, per qualunque  $A$  di classe traccia si può scrivere:

$$\int_G U_g A U_{g^{-1}} \mu(dg) = \text{Tr}[A] \mathbb{1}_V. \quad (1.22)$$

Con le stesse tecniche è possibile dimostrare la cosiddetta “formula della tomografia”:

$$A = \int_G \text{Tr} [U_g^\dagger A] U_g \mu(dg). \quad (1.23)$$

Per dimostrarla è sufficiente osservare che:

$$\begin{aligned} |i\rangle\langle j| &= \int_G U_g |j\rangle\langle j| U_g^\dagger \mu(dg) |i\rangle\langle j| = \\ &= \int_G \text{Tr} [U_g^\dagger |i\rangle\langle j|] U_g \mu(dg) |j\rangle\langle j|, \\ |i\rangle\langle j| &= |i\rangle\langle j| \int_G U_g^\dagger |i\rangle\langle i| U_g \mu(dg) = \\ &= |i\rangle\langle i| \int_G \text{Tr} [U_g^\dagger |i\rangle\langle j|] U_g \mu(dg), \end{aligned}$$

da cui

$$|i\rangle\langle j| = \int_G \text{Tr} [U_g^\dagger |i\rangle\langle j|] U_g \mu(dg),$$

e quindi, per linearità, la relazione è dimostrata.

Per una UIR  $N$ -dimensionale di un gruppo discreto  $\mathbf{G}$  tutti gli integrali vanno visti come somma sugli elementi del gruppo per il fattore  $N/|\mathbf{G}|$ .

Verranno spesso considerati gruppi di Lie, ovvero gruppi che sono anche una varietà continua e la cui legge di composizione e la funzione che associa ad ogni elemento il suo inverso sono mappe continue sulla varietà. Ad un gruppo di Lie viene associata un'algebra di Lie, ovvero uno spazio vettoriale di dimensione pari alla dimensione della varietà sottostante il gruppo, dotato di un prodotto di Lie che soddisfi l'identità di Jacobi, che sia bilineare ed antisimmetrico. L'algebra di Lie è isomorfa allo spazio tangente al gruppo nell'identità. L'esponenziazione di un elemento dell'algebra, restituisce un elemento del gruppo, ma va menzionata l'esistenza di molti gruppi i cui elementi non sono tutti ricavabili mediante esponenziazione.

Un elemento di un gruppo di Lie  $\mathbf{G}$  agisce su una varietà continua  $\Sigma$  come una mappa biunivoca continua di  $\Sigma$  in sè:  $g : \theta \mapsto g\theta$ ,  $\theta \in \Sigma$ . L'azione di  $\mathbf{G}$  su  $\Sigma$  è detta transitiva se qualunque  $\theta_0 \in \Sigma$  può essere trasformato in un qualsiasi altro  $\theta \in \Sigma$  sotto l'azione di un elemento del gruppo. Si supponrà d'ora innanzi che  $\mathbf{G}$  abbia azione transitiva su  $\Sigma$ . Se il sottogruppo  $\mathbf{G}_0$  che lascia  $\theta_0$  invariato

(detto stazionario) è banale, allora la mappa che a  $g \in \mathbf{G}$  associa  $\theta = g\theta_0 \in \Sigma$  costituisce un'identificazione del gruppo con la varietà  $\Sigma$ .

Nel caso in cui il sottogruppo stazionario sia unimodulare è possibile definire una misura  $\nu$  su  $\Sigma$  che sia invariante per l'azione del gruppo  $\mathbf{G}$ , cioè:

$$\nu(gB) = \nu(B), \quad g \in \mathbf{G}, \quad B \in \mathcal{A}(\Sigma).$$

Quella appena data è una condizione sufficiente. Se  $\mathbf{G}_0$  è anche compatto, come si assumerà d'ora in avanti, allora

$$\nu(B) = \mu(\theta^{-1}(B)), \quad \text{dove } \theta^{-1}(B) = \{g : g\theta_0 \in B\}.$$

### 1.2.1 Esempio di gruppo discreto: $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$

Il gruppo  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  è il gruppo abeliano delle traslazioni discrete di un reticolo immerso in un toro. Come rappresentazione unitaria proiettiva N-dimensionale daremo la seguente:

$$U(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k m / N} |k\rangle \langle k \oplus n|, \quad (1.24)$$

la cui legge di composizione risulta:

$$\begin{aligned} U(m, n)U(m', n') &= \sum_k \sum_{k'} e^{2\pi i (km + k'm') / N} |k\rangle \langle k \oplus n| |k'\rangle \langle k' \oplus n'| = \\ &= \sum_k e^{2\pi i [k(m+m') + nm'] / N} |k\rangle \langle k \oplus n \oplus n'| = \\ &= e^{2\pi i nm' / N} U(m \oplus m', n \oplus n'). \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.2.2 Esempio di gruppo continuo: $SU(2)$ e i suoi stati coerenti

Consideriamo il gruppo  $\mathbf{G} = \{g\}$ , dove

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{con } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (1.26)$$

Questo gruppo, detto  $SU(2)$ , è omeomorfo a  $S^3 = \{a = Re(\alpha), b = Im(\alpha), c = Re(\beta), d = Im(\beta) : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ , quindi è semplicemente connesso. I generatori infinitesimi dell'algebra di Lie ad esso associata sono:

$$X_1 = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

i quali soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[X_i, X_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} X_k, \quad (1.28)$$

dove  $\epsilon_{ijk}$  è il tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita.

Per costruire le rappresentazioni irriducibili di  $SU(2)$  si trovano quelle della sua algebra di Lie e poi le si esponenziano per passare dall'algebra al gruppo. Si può dimostrare in modo relativamente semplice che ogni rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo  $SU(2)$  è di dimensione  $2j + 1$ , dove  $j$  può essere un numero intero o semiintero, positivo. Nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}^j$  che supporta la rappresentazione  $j$ -esima, si definisce una base  $|j, m\rangle$ , con  $m = -j \dots + j$ , e gli operatori

$$J_3, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2, \quad J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

tali che:

$$\begin{aligned} J_3|j, m\rangle &= m|j, m\rangle, & J^2|j, m\rangle &= j(j+1)|j, m\rangle, \\ J_{\pm}|j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.29)$$

da cui

$$J_-|j, -j\rangle = 0, \quad |j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!(2j)!}} (J_+)^{j+m} |j, -j\rangle. \quad (1.30)$$

Questi operatori soddisfano le relazioni di commutazione:

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_3, \quad [J_i, J^2] = 0, \quad (1.31)$$

le quali risultano equivalenti alle relazioni date per i generatori dell'algebra di Lie di  $SU(2)$  e costituiscono quindi una rappresentazione dell'algebra di quest'ultimo.

Il generico elemento della rappresentazione unitaria irriducibile  $j$ -esima, corrispondente all'elemento  $g$  del gruppo, identificato con un angolo di rotazione  $\omega$  ed un asse di rotazione  $\mathbf{n}$ , sarà:

$$U_g^j = \exp(i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \quad (1.32)$$

E' di fondamentale importanza notare come  $\mathbf{J}$  sia un operatore vettoriale, cioè:

$$U_g \mathbf{J} U_g^\dagger = R(g) \mathbf{J}, \quad (1.33)$$

dove  $R(g)$  è una matrice che agisce sul vettore di operatori e che corrisponde alla rotazione attorno all'asse  $\mathbf{n}$  e di angolo  $\omega$  in  $\mathbb{R}^3$ . Questo può essere direttamente verificato usando la formula BCH:

$$e^{zA} B e^{-zA} = B + z[A, B] + \frac{z^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \equiv \exp(z \operatorname{ad} A)[B], \quad (1.34)$$

la quale può essere dedotta sviluppando in serie di McLaurin rispetto a  $z$  il primo termine dell'identità. Per questo gruppo valgono una serie di identità largamente utilizzate durante lo sviluppo di questo lavoro. Anche se l'uso di alcune di esse nella versione definitiva dei calcoli può essere evitato, vengono qui riportate per completezza, rimandando al lavoro di Masashi Ban [4] per una chiara e dettagliata dimostrazione.

*Ordinamento normale ed antinormale*

$$\begin{aligned} \exp(a_+ J_+ + a_0 J_0 + a_- J_-) &= \exp(A_+ J_+) \exp(\ln(A_0) J_0) \exp(A_- J_-) = \\ &= \exp(B_- J_-) \exp(\ln(B_0) J_0) \exp(B_+ J_+), \end{aligned} \quad (1.35)$$

dove

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= \frac{(a_{\pm}) \sinh \phi}{\cosh \phi - (a_0/2\phi) \sinh \phi}, \\ A_0 &= [\cosh \phi - (a_0/2\phi) \sinh \phi]^{-2}, \\ B_{\pm} &= \frac{(a_{\pm}) \sinh \phi}{\cosh \phi + (a_0/2\phi) \sinh \phi}, \\ B_0 &= [\cosh \phi + (a_0/2\phi) \sinh \phi]^{-2}, \\ \phi &= [(a_0/2)^2 + a_+ a_-]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Verrà usata soprattutto la formula che porta all'ordinamento normale posta in questa forma:

$$\begin{aligned} \exp\left(i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}(\vartheta, \varphi)\right) &= \exp(\alpha_+ J_+) \alpha_0^{J_0} \exp(\alpha_- J_-), \\ \alpha_{\pm} &= \frac{\sin \vartheta \sin \frac{\omega}{2} e^{\pm i\varphi}}{\cos \frac{\omega}{2} + i \cos \vartheta \sin \frac{\omega}{2}}, \\ \alpha_0 &= \left[ \cos \frac{\omega}{2} + i \cos \vartheta \sin \frac{\omega}{2} \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

ottenuta facendo le debite sostituzioni.

### Stati coerenti del gruppo $SU(2)$

Fissato un vettore  $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$  il set di vettori della forma  $|\psi_g\rangle = U_g|\psi_0\rangle$  è detto sistema di stati coerenti del gruppo. Per l'irriducibilità della rappresentazione risulta che questo insieme è un insieme overcompleto di stati. Due vettori  $|\psi_{g_1}\rangle, |\psi_{g_2}\rangle$  differiranno unicamente dalla fase se e solo se si avrà  $U_{g_1^{-1}g_2}|\psi_0\rangle = \exp(i\alpha)|\psi_0\rangle$ . Il sottogruppo  $H$  di  $\mathbf{G}$  (in questo caso semplicemente  $SU(2)$ ) i cui elementi soddisfano l'equazione

$$U_h|\psi_0\rangle = \exp[i\alpha(h)]|\psi_0\rangle, \quad (1.38)$$

è detto sottogruppo di isotropia per lo stato  $|\psi_0\rangle$ . Per generare un insieme di stati distinti (cioè che non differiscano semplicemente di una fase) sarà sufficiente utilizzare elementi di  $\mathbf{G}$  che non siano nel medesimo coset sinistro di  $H$ , cioè che non appartengano entrambi all'insieme  $gH$  per qualche  $g \in \mathbf{G}$ ; per dirla in breve si scelgono soltanto i rappresentativi delle distinte classi di equivalenza che si determinano quozientando il gruppo con il sottogruppo di isotropia. Nel caso di  $SU(2)$ , se  $|\psi_0\rangle = |m\rangle$  il sottogruppo di isotropia è  $H = U(1)$  generato da  $J_3$  e il sistema di stati coerenti è determinato dagli elementi della UIR della forma:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{n}) &= \exp\left(i\vartheta(\mathbf{n} \wedge \mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}\right) = \\ &= \exp\left(\zeta J_+ - \bar{\zeta} J_-\right) = \exp(\xi J_+)(1 + |\xi|^2)^{J_3} \exp(-\bar{\xi} J_-), \end{aligned} \quad (1.39)$$

dove  $\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ ,  $\zeta = i\frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi}$ ,  $\xi = -\tan \frac{\vartheta}{2}e^{-i\varphi}$ .

Per visualizzare meglio la situazione è opportuno osservare che  $U(\mathbf{n})$  è la rotazione che porta l'asse  $\mathbf{n}$  sul versore dell'asse  $z$ . Gli operatori  $U(\mathbf{n})$  non formano gruppo, infatti:

$$U(\mathbf{n}_1)U(\mathbf{n}_2) = U(\mathbf{n}_3) \exp(i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)J_3),$$

dove  $\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$  è l'area del triangolo geodesico sulla sfera con vertici in  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{k}$ .

La scelta del vettore di partenza tra i diversi  $|m\rangle$  è determinata dall'esigenza di individuare tra questi quello per il quale il sistema di stati coerenti ammette dispersione minima per  $J^2$  che è l'operatore quadratico di Casimir dell'algebra. Questo perché si desidera che il sistema di stati coerenti sia quanto di più vicino ci possa essere ad uno stato classico del sistema in esame. Lo stato che fa al caso nostro è  $|\psi_0\rangle = |-j\rangle$ , infatti:

$$\begin{aligned} \Delta J^2 &= \langle -j|J^2|-j\rangle - \langle -j|J_1|-j\rangle^2 - \langle -j|J_2|-j\rangle^2 - \langle -j|J_3|-j\rangle^2 \\ &= \min(\Delta J^2) = j. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Grazie alla covarianza la dispersione è la stessa per tutti gli stati coerenti. Gli stati coerenti di spin minimizzano anche la relazione di incertezza:

$$\langle J_1^2 \rangle \langle J_2^2 \rangle \geq \langle J_3 \rangle^2 \quad (1.41)$$

e tutte le sue permutazioni cicliche.

Sfruttando le proprietà di trasformazione dell'operatore  $\mathbf{J}$  risulta che:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{n})J_3U^\dagger(\mathbf{n}) &= U(\mathbf{n})\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}U^\dagger(\mathbf{n}) = \left(R(\mathbf{n})\mathbf{J}\right) \cdot \mathbf{k} = \\ &= \mathbf{J} \cdot \left(R^\dagger(\mathbf{n})\mathbf{k}\right) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

dove con  $R(\mathbf{n})$  si indica la matrice  $3 \times 3$  corrispondente alla rotazione dello spazio tridimensionale che porta l'asse  $\mathbf{n}$  sull'asse  $\mathbf{k}$ . Grazie a questa equazione è immediato osservare che:

$$\left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\right)U(\mathbf{n})|m\rangle = mU(\mathbf{n})|m\rangle; \quad (1.43)$$

in particolare lo stato coerente  $|\mathbf{n}\rangle$  risulta autostato relativo all'autovalore  $-j$  dell'operatore  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ .

Per i calcoli che verranno eseguiti è importante conoscere gli elementi di matrice  $\langle m|U(\mathbf{n})|m'\rangle$ . Per farlo si ordina normalmente  $U(\mathbf{n})$  usando la (1.39), e si calcola  $e^{\alpha J_-}|m\rangle$ :

$$\begin{aligned} e^{\alpha J_-}|m\rangle &= \sum_{l=0}^{m+j} \frac{\alpha^l}{l!} J_-^l |m\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{m+j} \frac{\alpha^l}{l!} \left[ \frac{(j+m)!(j-(m-l))!}{(j-m)!(j+(m-l))!} \right]^{1/2} |m-l\rangle = \\ &= \sum_{l=-j}^m \frac{\alpha^{m-l}}{(m-l)!} \left[ \frac{(j+m)!(j-l)!}{(j-m)!(j+l)!} \right]^{1/2} |l\rangle. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \langle m|U(\mathbf{n})|m'\rangle &= \langle m|\exp(\xi J_+)(1+|\xi|^2)^{J_3}\exp(-\bar{\xi}J_-)|m'\rangle = \\ &= \sum_{l=-j}^{\min(m,m')} \frac{\xi^{m-l}}{(m-l)!} \left[ \frac{(j+m)!(j-l)!}{(j-m)!(j+l)!} \right]^{1/2} (1+|\xi|^2)^l \times \\ &\times \frac{(-\bar{\xi})^{m'-l}}{(m'-l)!} \left[ \frac{(j+m')!(j-l)!}{(j-m')!(j+l)!} \right]^{1/2} = \\ &= \left[ \frac{(j+m)!(j+m')!}{(j-m)!(j-m')!} \right]^{1/2} \xi^m (-\bar{\xi})^{m'} \times \\ &\times \sum_{l=-j}^{\min(m,m')} \left( -\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \right)^l \frac{(j-l)!}{(j+l)!} \frac{1}{(m-l)!(m'+l)!}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Sostituendo  $m'$  con  $-j$  nell'ultima espressione si ricava immediatamente lo sviluppo degli stati coerenti sulla base  $|m\rangle$ :

$$\langle m|\mathbf{n}\rangle = \left[ \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right] \left( -\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{j+m} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^{j-m} e^{-i(j+m)\varphi}, \quad (1.46)$$

dove nelle semplificazioni si è sostituito  $\xi = -\tan \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi}$ .

Con questa formula è possibile calcolare il prodotto scalare di due stati coerenti inserendo fra essi una completezza, il risultato è:

$$\langle \mathbf{n}_1|\mathbf{n}_2\rangle = \exp[i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)] \left( \frac{1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{2} \right)^j. \quad (1.47)$$

Si sa già che gli stati coerenti formano un set overcompleto, la risoluzione dell'identità che essi danno è:

$$\frac{2j+1}{4\pi} \int d\mathbf{n} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| = \mathbb{1}. \quad (1.48)$$

La correttezza della normalizzazione è facilmente verificabile prendendo il valore di aspettazione sullo stato  $|-j\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle -j| \frac{2j+1}{4\pi} \int d\mathbf{n} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| |-j\rangle &= \frac{2j+1}{4\pi} \int d\mathbf{n} \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right)^{2j} = \\ &= \frac{2j+1}{4\pi} 2\pi \int_{-1}^{+1} dx \left( \frac{1+x}{2} \right)^{2j} = 1. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Come si è soliti fare per gli stati coerenti di radiazione, anche per gli stati coerenti di spin è possibile introdurre le funzioni  $P(\mathbf{n})$  e  $Q(\mathbf{n})$ . Poiché  $SU(2)$  ha rappresentazioni finito dimensionali, ogni operatore  $A$  è in corrispondenza biunivoca con funzioni  $P(\mathbf{n})$  e  $Q(\mathbf{n})$  che, contrariamente a quanto accade per la radiazione, sono infinitamente differenziabili. Le relazioni che definiscono tali funzioni sono:

$$A = \frac{2j+1}{4\pi} \int d\mathbf{n} P_A(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|, \quad (1.50)$$

$$Q_A(\mathbf{n}) = \langle \mathbf{n}| A |\mathbf{n}\rangle. \quad (1.51)$$

Per una lista di semplici esempi di  $Q$  e  $P$  per gli operatori più comuni si fa riferimento alla tabella presente nel capitolo sui modelli di misurazione, tratta dal Perelomov [5]. Va tenuta presente la possibilità di indicizzare gli stati coerenti attraverso la proiezione stereografica del vettore  $\mathbf{n}$ , la quale consente di eseguire vantaggiosamente alcuni calcoli sul piano complesso.

### 1.3 Stima e POVM covarianti

Il formalismo delle POVM consente di descrivere misurazioni che intendono stimare parametri di un sistema quantistico che non sono associati ad alcuna osservabile, il tipico esempio è la fase di un modo di radiazione. Qui si tratteranno particolari problemi di stima, quelli covarianti, nei quali l'insieme di appartenenza del parametro da stimare ammette proprietà di simmetria.

Sia  $\mathbf{G}$  un gruppo di Lie che agisce transitivamente su una varietà continua  $\Sigma$  e che ha una rappresentazione unitaria proiettiva sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Una POVM a valore in  $\Sigma$  è detta covariante se per ogni  $B \in \mathcal{A}(\Sigma)$ :

$$U_g^\dagger \Pi(B) U_g = \Pi(g^{-1}B). \quad (1.52)$$

Questo tipo di POVM riveste un ruolo fondamentale nella teoria della stima quantistica covariante. Partendo da uno stato  $\rho_{\theta_o}$  iniziale, descritto dal parametro  $\theta_o \in \Sigma$ , si può generare la famiglia covariante di stati  $\rho_\theta = U_g \rho_{\theta_o} U_g^\dagger$ , dove  $\theta = g\theta_o$ , parametrizzata dagli elementi di  $\Sigma$ . Eseguendo una misurazione con POVM covariante su uno di questi stati, la probabilità che il risultato  $\theta_*$  sia in  $B \in \mathcal{A}(\Sigma)$  risulta:

$$P(\theta_* \in B \mid \theta) = \text{Tr}[\rho_\theta \Pi(B)] = \text{Tr}[\rho_{\theta_o} U_g^\dagger \Pi(B) U_g] = \text{Tr}[\rho_{\theta_o} \Pi(g^{-1}B)],$$

sostituendo  $B$  con  $gB$ , si ottiene infine:

$$P(\theta_* \in gB \mid g\theta_o) = P(\theta_* \in B \mid \theta_o). \quad (1.53)$$

La trasformazione applicata allo stato si riflette in modo covariante sulla distribuzione di probabilità, per cui le POVM covarianti sono utilizzate per misure di parametri caratterizzati dall'ammettere un gruppo di trasformazioni di simmetria.

Per ogni POVM covariante esiste un solo operatore  $S$  hermitiano e positivo, che commuti con i rappresentativi del sottogruppo stazionario  $\mathbf{G}_0$  di  $\theta_o$ , e tale che:

$$\Pi(B) = \int_B U_{g(\theta)} S U_{g(\theta)}^\dagger \nu(d\theta), \quad \Pi(\Sigma) = \mathbf{1}, \quad (1.54)$$

dove  $g(\theta)$  è un  $g$  per cui  $\theta = g\theta_o$ . Si ricorda che  $\nu$  è la misura invariante indotta dal gruppo sulla varietà dei parametri  $\Sigma$ .

Inoltre ogni  $\Pi$  nella forma ora presentata, con  $S$  che soddisfi le medesime proprietà, è una POVM covariante a valori in  $\Sigma$ .

La teoria della stima quantistica covariante si pone il problema di individuare la migliore POVM  $\Pi$  al fine di stimare il parametro di trasformazione  $\theta$ .

Si fissa una funzione costo  $C(\theta_*, \theta)$  che valuti il peso dello scostamento del risultato letto  $\theta_*$  dal valore vero  $\theta$  del parametro, che sia invariante rispetto all'azione di  $\mathbf{G}$ , ovvero:

$$C(g\theta_*, g\theta) = C(\theta_*, \theta).$$

Si definisce poi il costo medio relativo alla POVM  $\Pi$ , per lo stato preparato in  $\rho_\theta$ :

$$\bar{C}_\theta(\Pi) = \int C(\theta_*, \theta) Tr[\rho_\theta \Pi(d\theta_*)]. \quad (1.55)$$

L'obiettivo è trovare la POVM che minimizzi globalmente il costo medio. Si costruisce pertanto un singolo funzionale a partire dai diversi  $\bar{C}_\theta(\Pi)$  e lo si minimizza rispetto alla POVM. I funzionali comunemente adottati sono il costo medio Bayesiano e il costo medio massimo. Nel primo caso viene data una distribuzione di probabilità a priori  $\varrho$  sui valori del parametro da stimare e con questa si mediano i costi medi:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varrho(\Pi) &= \int \bar{C}_\theta(\Pi) \varrho(d\theta) = \\ &= \int \int C(\theta_*, \theta) Tr[\rho_\theta \Pi(d\theta_*)] \varrho(d\theta). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Nel secondo caso il funzionale è:

$$\mathcal{C}_{max}(\Pi) = \max_\theta \bar{C}_\theta(\Pi). \quad (1.57)$$

Un teorema assicura che il minimo di  $\mathcal{C}_\varrho(\Pi)$  e  $\mathcal{C}_{max}(\Pi)$  è raggiunto con una POVM covariante, inoltre per una qualsiasi POVM covariante si ha:

$$\mathcal{C}_{max}(\Pi) = \bar{C}_\theta(\Pi) = \mathcal{C}_\varrho(\Pi). \quad (1.58)$$

Sempre per una POVM covariante è possibile scrivere il costo medio  $\bar{C}_{\theta_o}(\Pi)$  in modo assai conveniente:

$$\bar{C}_{\theta_o}(\Pi) = \int C(\theta_*, \theta_o) Tr[\rho_{\theta_o} U_{g(\theta_*)} S U_{g(\theta_*)}^\dagger] \nu(d\theta_*) = Tr[C_0 S], \quad (1.59)$$

dove  $C_0$  è detto *operatore costo* ed è espresso da:

$$C_0 = \int_\Sigma C(\theta_*, \theta_o) U_{g(\theta_*)}^\dagger \rho_{\theta_o} U_{g(\theta_*)} \nu(d\theta_*) = \int_G C(g\theta_o, \theta_o) U_g^\dagger \rho_{\theta_o} U_g \mu(dg). \quad (1.60)$$

Quindi, la miglior POVM covariante si troverà eseguendo la minimizzazione variando l'operatore hermitiano  $S$  che genera la POVM stessa.

### 1.3.1 Il caso di rappresentazione irriducibile di gruppo compatto

Ora si considereranno gruppi compatti, in modo da avere rappresentazioni su spazi di Hilbert a dimensione finita e misura del gruppo normalizzabile a uno. Nel caso in cui la rappresentazione sia irriducibile proiettiva si ha una notevole semplificazione dell'impostazione. Infatti, l'applicazione del primo lemma di Schur consente di porre in corrispondenza biunivoca tutte le POVM covarianti con gli operatori densità del sistema in esame attraverso la relazione:

$$\Pi(d\theta) = U_{g(\theta)} S_0 U_{g(\theta)}^\dagger \nu(d\theta), \quad (1.61)$$

dove la misura  $\nu$  data sull'insieme  $\Sigma$  è quella che discende dalla misura sul gruppo normalizzata ad uno, ed  $S_0$  è un operatore densità che commuti con i rappresentativi del sottogruppo stazionario  $\mathbf{G}_0$ .

Nel caso in cui quest'ultimo sia banale,  $S_0$  potrà essere uno stato qualunque, quindi i punti estremali dell'insieme convesso delle POVM covarianti saranno le POVM generate a partire da  $S_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ , ovvero da stati puri.

A questo punto risulta evidente che il minimo del funzionale  $Tr[C_0 S_0]$  è raggiunto per un qualsiasi stato  $S_0$  che sia diagonale sugli autostati di  $C_0$  ad autovalore minimo  $\lambda_{min}$ , dove si avrà:

$$\min \bar{C}_{\theta_0}(\Pi) = \lambda_{min}.$$

### 1.3.2 Esempio di stima covariante: orientazione di uno spin

Si dispone di un sistema di spin  $j$  preparato in uno stato:

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{m=-j}^{+j} p_j |m\rangle\langle m|, \quad (1.62)$$

simmetrico rispetto alla rotazione attorno all'asse  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}$ . L'apparato di preparazione viene ruotato in modo che  $\mathbf{k}$  vada a coincidere con un generico versore  $\mathbf{n}$  che sarà il nuovo asse di simmetria dello stato. Questa operazione si traduce sullo stato del sistema in una trasformazione data un elemento della rappresentazione irriducibile proiettiva  $(2j+1)$ -dimensionale del gruppo delle rotazioni. Considerando che le rotazioni attorno a  $\mathbf{k}$  lasciano invariato il sistema, tutti i diversi stati ottenibili con questa procedura saranno:

$$\rho_{\mathbf{n}} = U(\mathbf{n}) \rho_{\mathbf{k}} U^\dagger(\mathbf{n}), \quad (1.63)$$

dove  $U(\mathbf{n})$  è il medesimo operatore introdotto nel paragrafo sugli stati coerenti di spin (1.39).

Ruotando l'apparato di preparazione si ottiene così una famiglia covariante di stati, la cui orientazione può essere definita come l'asse di simmetria, ovvero il vettore  $\mathbf{n}$  che indicizza lo stato.

Supponendo di non conoscere l'orientazione  $\mathbf{n}$  dello stato, ci si pone il problema di stimarla nel modo migliore possibile con una misurazione.

Come funzione costo si sceglie la seguente:

$$C(\mathbf{n}_*, \mathbf{n}) = |\mathbf{n}_* - \mathbf{n}|^2 = 2(1 - \mathbf{n}_* \cdot \mathbf{n}), \quad (1.64)$$

che è invariante per l'azione delle  $U(\mathbf{n})$ , e da questa si costruisce l'operatore costo, come spiegato nel paragrafo precedente:

$$C_0 = \int \frac{2j+1}{4\pi} 2(1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) U^\dagger(\mathbf{n}) \rho_{\mathbf{k}} U(\mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (1.65)$$

Questo operatore può essere calcolato esplicitamente (cfr. [6]) oppure, osservando che esso è invariante per rotazioni attorno all'asse  $\mathbf{k}$  e quindi diagonale sulla base  $|m\rangle$ , può essere determinato calcolandone gli elementi di matrice diagonali. Risulta comunque:

$$C_0 = \frac{2}{2j+1} \left[ \mathbb{1} - \frac{Tr[\rho_{\mathbf{k}} J_3]}{j(j+1)} J_3 \right], \quad (1.66)$$

il quale ammette come autovalore minimo

$$\lambda_{min} = \frac{2}{2j+1} (1 - |Tr[\rho_{\mathbf{k}} J_3]| (j+1)^{-1}),$$

in corrispondenza con gli autostati  $|\pm j\rangle$ , secondo che l'argomento del valore assoluto sia rispettivamente positivo o negativo.

La POVM può essere quindi scritta come:

$$\Pi(d\mathbf{n}) = \frac{2j+1}{4\pi} U(\mathbf{n}) |j, \bar{\mathbf{n}}\rangle \langle j, \bar{\mathbf{n}}| U^\dagger(\mathbf{n}) d\mathbf{n}, \quad (1.67)$$

dove  $\bar{\mathbf{n}}$  è il vettore che coincide con l'orientazione data dal valor medio dell'operatore  $\mathbf{J}$  sullo stato iniziale non trasformato, e  $|j, \bar{\mathbf{n}}\rangle$  è l'autostato ad autovalore  $+j$  dell'operatore  $\mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ .

Ora si vuole stimare la trasformazione subita da uno stato che non presenti simmetrie e il cui apparato di preparazione viene ruotato portando un riferimento su di esso rigidamente fissato a coincidere con un'altro. Data l'assenza della simmetria assiale, non sarà più sufficiente considerare solo gli elementi di  $SU(2)$

del tipo di  $U(\mathbf{n})$ , ma sarà necessario utilizzare tutti i rappresentativi del gruppo. Il parametro che descrive la situazione prima della trasformazione sarà  $\theta_0 \equiv \{\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0\}$  e verrà scelto in modo da coincidere con la solita terna dei versori degli assi x, y, z. Il parametro trasformato sarà  $\theta \equiv \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  e il parametro misurato sarà  $\theta_* \equiv \{\mathbf{n}_1^*, \mathbf{n}_2^*, \mathbf{n}_3^*\}$ , dove in ogni caso gli  $\mathbf{n}_i$  formeranno una terna ortogonale destrorsa.

Come funzione costo si adotta in questo caso:

$$C(\theta_*, \theta) = \sum_{i=1}^3 |\mathbf{n}_i^* - \mathbf{n}_i|^2 = 2 \sum_{i=1}^3 (1 - \mathbf{n}_i^* \cdot \mathbf{n}_i), \quad (1.68)$$

e il corrispondente operatore costo risulta essere:

$$\begin{aligned} C_0 &= 2 \sum_{i=1}^3 \int_G (1 - \mathbf{n}_i^0 \cdot g\mathbf{n}_i^0) U_g^\dagger \rho_{\theta_0} U_g \mu(dg) = \\ &= \frac{2}{2j+1} \left[ 3 - \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle J_i \rangle^2}}{j(j+1)} \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right]. \end{aligned} \quad (1.69)$$

L'autovalore minimo si trova ancora una volta in corrispondenza del vettore  $|j, \bar{\mathbf{n}}\rangle$  e la POVM ottimale sarà:

$$\Pi(d\theta) = U_{g(\theta)} |j, \bar{\mathbf{n}}\rangle \langle j, \bar{\mathbf{n}}| U_{g(\theta)}^\dagger \nu(d\theta), \quad (1.70)$$

dove  $\nu$  verrà opportunamente normalizzata.

Si può osservare come la POVM appena data assuma gli stessi valori per i  $\theta = g\theta_0$  per tutti i  $g$  appartenenti ad un coset sinistro del sottogruppo di isotropia dello stato  $|j, \bar{\mathbf{n}}\rangle$ , che non è altro che il gruppo delle rotazioni attorno all'asse  $\bar{\mathbf{n}}$ . Questo significa che in realtà la POVM non è in grado di stabilire se un tale tipo di trasformazione ci sia stata o meno. Insomma, la POVM non consente di distinguere uno stato con  $\langle \mathbf{J} \rangle \parallel \bar{\mathbf{n}}$  non simmetrico da uno simmetrico.

Nel capitolo seguente si cercherà di dare la realizzazione della POVM detta di Arecchi [7], ovvero la POVM che discende dalla risoluzione dell'identità costruita sugli stati coerenti di spin, che corrisponde alla (1.67).



## Capitolo 2

# Modelli di realizzazione di misurazioni

Come visto nel primo capitolo, ogni misurazione su un sistema fisico ammette realizzazione attraverso l'interazione del sistema con un altro sistema detto usualmente probe, opportunamente preparato, sul quale viene poi effettuata la misurazione di una osservabile. Questo tipo di realizzazione è detta indiretta, perché il sistema sotto esame non subisce la misurazione di un osservabile ed in generale non viene distrutto. In questo capitolo verranno illustrati i modelli di realizzazione di alcune misurazioni, facendo riferimento a [10]. Viene inoltre presentato e risolto per spin qualsiasi il primo modello di misurazione della direzione dello spin.

### 2.1 Modello di von Neumann

Originariamente questo modello è stato ideato da von Neumann [11] per realizzare la misurazione indiretta della posizione di una particella; può però essere trasposto nel dominio dell'ottica quantistica rivisitandolo come modello di realizzazione della misurazione della quadratura  $X$  di un modo di radiazione  $a$ .

La quadratura  $X$  e la sua coniugata  $Y$  sono definite come:

$$X = \frac{1}{2}[a + a^\dagger], \quad Y = \frac{i}{2}[a^\dagger - a]; \quad (2.1)$$

esse soddisfano la relazione di commutazione

$$[X, Y] = i/2, \quad (2.2)$$

ed ammettono entrambe un set di autovettori impropri ortonormali alla Dirac, indicati rispettivamente con  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  tali che:

$$\begin{aligned} X|x\rangle &= |x\rangle, & \langle x|x'\rangle &= \delta(x-x'), \\ Y|y\rangle &= |y\rangle, & \langle y|y'\rangle &= \delta(y-y'), \\ \langle x|y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{2ixy} & \langle x|Y|\psi\rangle &= -\frac{i}{2}\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove l'ultima è equivalente alla solita relazione data in meccanica quantistica per l'operatore  $\hat{p}$  nella rappresentazione delle  $x$  e discende dalla relazione di commutazione.

La POVM che descrive la misurazione ideale di  $X$  è  $\Pi(dx) = \hat{\delta}(x-X)dx = |x\rangle\langle x|dx$ . Come sistema di probe si sceglie un altro modo di radiazione  $a_P$ , preparato nello stato  $|\varphi_\epsilon\rangle_P$  tale che

$${}_P\langle x|\varphi_\epsilon\rangle_P = \frac{1}{(2\pi\epsilon^2)^{1/4}}e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\epsilon^2}}. \quad (2.4)$$

Questo tipo di preparazione è detta vuoto *squeezed*, perché si ottiene applicando la trasformazione di *squeezing* della composizione in  $X$  allo stato di vuoto del modo di radiazione considerato. Tale trasformazione corrisponde all'operatore unitario:

$$S(\eta) = \exp\left[-\frac{\eta}{2}(a^{\dagger 2} - a^2)\right], \quad (2.5)$$

che viene detto di *squeezing* perché nella rappresentazione data dagli  $|x\rangle$  realizza una contrazione o una dilatazione a seconda del segno del parametro. Infatti:

$$-\frac{\eta}{2}(a^{\dagger 2} - a^2) = \frac{\eta}{2}(a + a^\dagger)(a - a^\dagger) + \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2}2X - 2iY,$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle x|S(\eta)|\psi\rangle &= \langle x|\exp\left[\frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2}2X - 2iY\right]|\psi\rangle = e^{\frac{\eta}{2}}e^{\eta x\frac{d}{dx}}\langle x|\psi\rangle = \\ &= e^{\frac{\eta}{2}}\langle e^\eta x|\psi\rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove si è fatto uso dell'espressione dell'operatore differenziale di dilatazione, il cui effetto è facilmente verificabile su potenze di  $x$  e poi applicabile all'intero sviluppo di Taylor di una funzione.

Riassumendo, poiché il vuoto ha composizione in  $x$  data da:

$$\langle x|0\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}, \quad (2.7)$$

si vede subito che  $|\varphi_\epsilon\rangle$  è semplicemente lo squeezing del vuoto per  $\eta = -\ln(2\epsilon)$ .

Tornando al proposito di questo paragrafo, per realizzare l'interazione tra sistema e probe adotteremo la trasformazione unitaria:

$$U = \exp \left[ -2iXY_P \right], \quad (2.8)$$

ottenibile da una hamiltoniana  $H = 2\hbar kXY_P$  con tempo di interazione  $t = k^{-1}$ , anche se onestamente l'accoppiamento è di difficile realizzazione, anche nel limite impulsivo (cfr. [12]).

A questo punto è possibile calcolare gli  $\Omega(x)$  definiti nel primo capitolo:

$$\begin{aligned} \Omega_\epsilon(x) &= {}_P \langle x | \exp(-2iXY_P) | \varphi_\epsilon \rangle_P = e^{-X \frac{d}{dx}} {}_P \langle x | \varphi_\epsilon \rangle_P = \\ &= \varphi_\epsilon(x - X) = \frac{1}{(2\pi\epsilon^2)^{1/4}} \exp \left[ -\frac{1}{4} \frac{(x - X)^2}{\epsilon^2} \right] = \\ &= \Omega_\epsilon^\dagger(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove si è usata l'espressione differenziale dell'operatore di traslazione, applicandola con un parametro di traslazione operatoriale (ovvero  $X$ ).

Si può finalmente scrivere:

$$\begin{aligned} I_{dx}^\epsilon(\rho) &= \Omega_\epsilon(x) \rho \Omega_\epsilon^\dagger(x) dx, \\ \Pi_\epsilon(dx) &= \frac{1}{(2\pi\epsilon)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x - X)^2}{\epsilon^2} \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove si osserva come  $\Pi_\epsilon$  corrisponda alla POVM della misurazione della quadratura  $X$  con risoluzione pari a  $\epsilon$ , e come il caso ideale venga raggiunto nel limite di massimo squeezing, ovvero di  $\epsilon \rightarrow 0$ . In tale limite, lo strumento riduce qualsiasi stato al vettore  $|x_0\rangle$  dove  $x_0$  è il risultato della misurazione (sarebbe più corretto dire che lo strumento riduce la composizione in  $x$  dello stato attorno al valore letto, con una varianza che va a zero nel limite di idealità). Questo modello dà una misurazione indiretta esattamente equivalente alla misurazione homodyne perfetta.

## 2.2 Modello di Arthurs-Kelly

Questo modello di misurazione spiega come sia possibile realizzare la misurazione congiunta di due osservabili non commutanti attraverso una misurazione indiretta, ed è stato per la prima volta esaminato da Arthurs e Kelly [13].

L'obbiettivo è la misurazione congiunta delle quadrature  $X$  e  $Y$  di un modo di radiazione  $a$ ; per fare questo si scelgono come probe altri due modi di radiazione

$a_1$  e  $a_2$  indipendenti che si fanno interagire con l'evolvente unitario

$$U = \exp \left[ -ik_1XY_1 + ik_2XY_2 \right], \quad (2.11)$$

dove le costanti  $k_1$  e  $k_2$  sono da selezionare opportunamente.

Si decide di misurare  $X_1$  su  $P_1$  e  $X_2$  su  $P_2$  e allora si calcolano in descrizione di Heisenberg i loro evoluti con l'operatore  $U$ . Usando la formula BCH, cioè  $e^A B e^{-A} = e^{ad^A}[B]$ , si trova:

$$\begin{aligned} X'_1 &= U^\dagger X_1 U = X_1 + \frac{1}{2}k_1X - \frac{1}{8}k_1k_2X_2, \\ Y'_2 &= U^\dagger Y_2 U = Y_2 + \frac{1}{2}k_2Y - \frac{1}{8}k_1k_2Y_1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

da cui, calcolando i valori medi e le varianze:

$$\begin{aligned} \langle X'_1 \rangle &= \langle X_1 \rangle + \frac{1}{2}k_1\langle X \rangle - \frac{1}{8}k_1k_2\langle X_2 \rangle, \\ \langle Y'_2 \rangle &= \langle Y_2 \rangle + \frac{1}{2}k_2\langle Y \rangle - \frac{1}{8}k_1k_2\langle Y_1 \rangle, \\ \langle \Delta^2 X'_1 \rangle &= \langle \Delta^2 X_1 \rangle + \frac{1}{4}k_1^2\langle \Delta^2 X \rangle + \frac{1}{64}k_1^2k_2^2\langle \Delta^2 X_2 \rangle, \\ \langle \Delta^2 Y'_2 \rangle &= \langle \Delta^2 Y_2 \rangle + \frac{1}{4}k_2^2\langle \Delta^2 Y \rangle + \frac{1}{64}k_1^2k_2^2\langle \Delta^2 Y_1 \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vanno scelte ancora le preparazioni  $|\varphi\rangle_1$  e  $|\varphi\rangle_2$  e i valori di  $k_1$  e  $k_2$  in modo che il valore medio delle grandezze misurate sui probe corrisponda a quello delle corrispondenti grandezze del sistema in esame. Per  $k_1 = k_2 = 2$  e preparazione dei due probe con stati a media nulla sulle quadrature, si ha effettivamente:

$$\langle X'_1 \rangle = \langle X \rangle, \quad \langle Y'_2 \rangle = \langle Y \rangle.$$

Per avere la miglior misurazione possibile, si vuole minimizzare il rumore aggiunto, cioè la somma degli ultimi due termini nell'espressione delle varianze, che descrivono come la distribuzione di probabilità delle due quadrature ottenuta con la misurazione sia allargata rispetto a quella originaria dello stato in esame. Questa miglora può essere ottenuta usando una preparazione *squeezed* degli stati dei probe. Infatti, poiché gli *squeezed* sono stati di minima indeterminazione, contraendo di un fattore  $\sqrt{2}$  la composizione in  $X_1$  e  $Y_2$  della preparazione dei probe 1 e 2 (e quindi allargando del medesimo fattore la composizione sulle quadrature coniugate) si ottiene:

$$\langle \Delta^2 X'_1 \rangle = \langle \Delta^2 X_1 \rangle + \frac{1}{4}, \quad \langle \Delta^2 Y'_2 \rangle = \langle \Delta^2 Y_2 \rangle + \frac{1}{4} \quad (2.14)$$

Calcoliamo  $\Omega(x_1, y_2)$ :

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, y_2) &= {}_1\langle x| {}_2\langle y| U_{12} S_1(\ln \sqrt{2}) \otimes S_2(-\ln \sqrt{2}) |0\rangle_1 |0\rangle_2 = \\ &= {}_1\langle x| {}_2\langle y| \exp \left[ -2i(XY_1 - YX_2) \right] \times \\ &\times \exp \left[ 2iX_1Y_1 \ln \sqrt{2} - 2iX_2Y_2 \ln \sqrt{2} \right] |0\rangle_1 |0\rangle_2,\end{aligned}\quad (2.15)$$

Ricordando che  $D(x + iy) = \exp[-2i(xY - yY)]$  e che  $\langle x|y\rangle = \frac{e^{2ixy}}{\sqrt{\pi}}$ , inserendo tra  $U_{12}$  e  $S_1$  le completezze in  $y_1, x_2, x'_1$  nell'ordine si arriva a:

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, y_2) &= \int dy_1 \int dx_2 \int dx'_1 \frac{1}{\pi} e^{2i(x_1y_1 - x_2y_2)} D^\dagger(x_2 + iy_1) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i2y_1x'_1} \times \\ &\times e^{\ln \sqrt{2} x'_1 \frac{d}{dx'_1}} \langle x'_1|0\rangle_1 e^{-\ln \sqrt{2} x_2 \frac{d}{dx_2}} \langle x_2|0\rangle_2\end{aligned}\quad (2.16)$$

Indicando con  $G^{1/2}(x, \sigma)$  la radice di una gaussiana normalizzata di varianza  $\sigma$  nella variabile  $x$ , considerando l'unitarietà di  $S$  e il fatto che

$$\int dx e^{ixy} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2}},$$

si dimostra che

$$\begin{aligned}G^{1/2}(x, \sigma) &\xrightarrow{S(\ln \gamma)} G^{1/2}(x, \sigma/\gamma), \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx e^{-2ixy} G^{1/2}(x, \sigma) &= G^{1/2}(y, 1/(4\sigma)).\end{aligned}\quad (2.17)$$

Usando queste relazioni, si ricava molto semplicemente:

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, y_2) &= \int dy_1 dx_2 \frac{1}{\pi} e^{2i(x_2y_2 - x_1y_1)} D(x_2 + iy_1) G^{1/2}(x_2, \sqrt{2}) G^{1/2}(y_1, \sqrt{2}/4) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi} e^{\alpha\bar{\lambda} - \bar{\alpha}\lambda} D(\lambda) e^{\frac{|\lambda|^2}{2}} = \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha|,\end{aligned}\quad (2.18)$$

dove  $|\alpha\rangle$  è lo stato coerente con  $\alpha = x_1 + iy_2$ .

Insomma, lo strumento e la POVM risultano essere:

$$\begin{aligned}I_{d^2\alpha}(\rho) &= \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \langle \alpha| \rho | \alpha\rangle d^2\alpha = |\alpha\rangle \langle \alpha| Q_\rho(\alpha) d^2\alpha, \\ \Pi(d^2\alpha) &= \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha|,\end{aligned}\quad (2.19)$$

pertanto il modello dà una misurazione esattamente equivalente alla misurazione heterodyne di un modo di radiazione.

### 2.3 Misurazione direzione momento angolare

Nella sezione sulla stima covariante del parametro di rotazione di uno spin  $j$  avente inizialmente momento angolare medio  $\langle \mathbf{J} \rangle$  diretto lungo  $-\mathbf{k}$ , si era visto come la POVM ottimale per un dato costo fosse quella costruita con gli stati coerenti del gruppo  $SU(2)$  generati a partire dal vettore  $| -j \rangle$ , ovvero:

$$\Pi(d\mathbf{n}) = \frac{2j+1}{4\pi} U(\mathbf{n}) | -j \rangle \langle -j | U^\dagger(\mathbf{n}) d\mathbf{n},$$

dove  $U(\mathbf{y}) = \exp(i\vartheta(\hat{\mathbf{y}} \wedge \mathbf{k}) \cdot \mathbf{J})$  e  $\vartheta$  è l'angolo azimutale del vettore  $\mathbf{y}$ . La misurazione di questa POVM consentirebbe di realizzare la misurazione congiunta delle tre componenti del momento angolare, ovvero di tre osservabili non commutanti. Infatti, in base a quanto detto nella sezione sugli stati coerenti di spin, per ogni operatore esiste una funzione sulla sfera che integrata con la POVM dà l'operatore stesso; in particolare si ha:

$$\begin{aligned} J_3 &\longleftrightarrow -(j+1) \cos \vartheta, \\ J_1 &\longleftrightarrow -(j+1) \sin \vartheta \cos \varphi, \\ J_2 &\longleftrightarrow -(j+1) \sin \vartheta \sin \varphi, \\ J_3^2 &\longleftrightarrow (j+1)(j + \frac{3}{2}) \cos^2 \vartheta, -\frac{1}{2}(j+1), \\ J_1^2 &\longleftrightarrow (j+1)(j + \frac{3}{2})(\sin \vartheta \cos \varphi)^2 - \frac{1}{2}(j+1), \\ J_2^2 &\longleftrightarrow (j+1)(j + \frac{3}{2})^2 (\sin \vartheta \sin \varphi)^2 - \frac{1}{2}(j+1), \end{aligned} \quad (2.20)$$

quindi, dalle prime tre:

$$\langle \mathbf{J} \rangle = -\frac{(2j+1)}{4\pi} \int [(j+1)\mathbf{n}] \text{Tr}[\rho|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|] d\mathbf{n} \quad (2.21)$$

Ogni misurazione sullo stato  $\rho$  realizza la variabile statistica “direzione e modulo di  $\mathbf{J}$  dello stato  $\rho$ ”, il cui valore sarà  $\tilde{\mathbf{J}} = (j+1)\mathbf{n}$  se viene letto il risultato  $\mathbf{n}$ . Come risulta evidente dall'espressione precedente, la media di questa variabile statistica è esattamente pari al valore medio di  $\mathbf{J}$  sullo stato  $\rho$ ; in questo senso si parla di misurazione congiunta *unbiased* di osservabili non commutanti: in media è corretto assumere che volta per volta il valore di  $\mathbf{J}$  sia esattamente  $(j+1)\mathbf{n}$ .

Però la varianza della variabile statistica  $\tilde{\mathbf{J}}$  è diversa dalla varianza dell'operatore  $\mathbf{J}$ , in particolare la prima è maggiore; in questo senso si parla di rumore aggiunto della misurazione congiunta, il quale può essere valutato come:

$$\begin{aligned}
\sum_i \left[ \langle \Delta^2 \tilde{J}_i^2 \rangle - \langle \Delta^2 J_i^2 \rangle \right] &= \sum_i \left[ \langle \tilde{J}_i^2 \rangle - \langle J_i^2 \rangle \right] = \\
&= (j+1)^2 \frac{2j+1}{4\pi} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| d\mathbf{n} - j(j+1) = \\
&= j+1.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

È importante osservare come, grazie alle proprietà degli stati coerenti di spin, conoscere la statistica dalla POVM di Arecchi sullo stato  $\rho$  equivale a conoscere  $\rho$  stesso; infatti con tale statistica, applicando la stessa tecnica prima usata per  $\mathbf{J}$ , si può calcolare il valore medio di qualunque operatore, il che consente di ricostruire lo stato.

Per quanto detto finora, si capisce l'importanza della realizzazione della POVM di Arecchi: si è cercato dunque un modello di misurazione indiretta. Procedendo per analogia con quanto fatto per la misurazione congiunta di due quadrature coniugate di un modo di radiazione, si è scelta un'interazione che accoppiasse ciascuna delle componenti di  $\mathbf{J}$  alle quadrature  $Y_i$  di tre modi di radiazione indipendenti:

$$U = \exp \left[ -it(J_1 Y_1 + J_2 Y_2 + J_3 Y_3) \right] = \exp \left[ -it\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y} \right], \tag{2.23}$$

dove  $\mathbf{Y}$  è il vettore costituito dalle tre quadrature  $Y_i$  dei tre modi di probe.

Come preparazione dei probe si utilizza un vuoto *squeezed* lungo  $X$ :

$${}_i \langle y | \psi_\lambda \rangle_i = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda^2 y^2}, \tag{2.24}$$

dove il parametro di *squeezing*  $\lambda$  tenderà a zero nel caso limite.

Sui tre probe si sceglie di eseguire la misurazione delle tre quadrature  $X_i$  e i tre risultati vengono messi sotto forma di un vettore a tre componenti  $\mathbf{x}$ . Si può finalmente dare l'espressione di  $\Omega(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}
\Omega(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y}} | \psi \rangle = \int d\mathbf{y} \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | \psi \rangle e^{-it\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y}} = \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}} \int d^3 \mathbf{y} e^{2i\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} e^{-it\mathbf{J} \cdot \mathbf{y}} e^{-\lambda^2 |\mathbf{y}|^2}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Lo scopo di tutte le osservazioni che seguiranno è il calcolo del limite per  $\lambda \rightarrow 0$  di  $\Omega_\lambda(x)$ ; esse sono necessarie anche perché, nel tentativo affrontare il problema analiticamente, si è subito visto che per  $j > \frac{1}{2}$  le difficoltà divengono presto insormontabili.

Anzitutto va sottolineata la covarianza di  $\Omega(x)$ ; infatti, indicando con  $R(\mathbf{n}, \varphi)$  una rotazione dello spazio tridimensionale di un angolo  $\varphi$  attorno alla direzione  $\mathbf{n}$ , si ha:

$$\begin{aligned}\Omega(R(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{x}) &= N \int d^3\mathbf{y} e^{2i\mathbf{x}\cdot(R^{-1}(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{y})} e^{-it\mathbf{J}\cdot\mathbf{y}} e^{-\lambda^2|\mathbf{y}|^2} = \\ &= N \int d^3\mathbf{y} e^{2i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} e^{-it(R^{-1}(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{J})\cdot\mathbf{y}} e^{-\lambda^2|\mathbf{y}|^2} = \\ &= U^\dagger(\mathbf{n}, \varphi)\Omega(\mathbf{x})U(\mathbf{n}, \varphi),\end{aligned}\quad (2.26)$$

dove si è fatto uso della proprietà del prodotto scalare

$$(R(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (R^\dagger(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{y}),$$

del cambio di variabile  $\mathbf{y} \rightarrow R\mathbf{y}$  (con jacobiano 1) e delle proprietà di trasformazione dell'operatore vettoriale  $\mathbf{J}$ . Si è definito  $U(\mathbf{n}, \varphi) = \exp[i\varphi\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}]$ . Poiché

$$\Omega(\mathbf{x}) = \Omega(R(\mathbf{x}, \varphi)\mathbf{x}) = U^\dagger(\mathbf{x}, \varphi)\Omega(\mathbf{x})U(\mathbf{x}, \varphi)$$

allora  $\Omega(\mathbf{x})$  deve commutare con il generatore delle rotazioni attorno all'asse  $\mathbf{x}$ , ovvero  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}$ . La conseguenza più importante di questa osservazione è che si può affermare che  $\Omega(\mathbf{x})$  è diagonale sulla base degli autovettori dell'operatore  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}$ , ovvero sugli stati  $U(\mathbf{x})|m\rangle$ , dove l'operatore  $U(\mathbf{x})$  definito nel primo capitolo è quello che corrisponde alla rotazione che porta il vettore  $\mathbf{x}$  a coincidere con l'asse  $\mathbf{k}$  e gli stati  $|m\rangle$  sono i soliti autovettori di  $J_3$ . Come  $\Omega(\mathbf{x})$  così anche  $\Omega^\dagger(\mathbf{x})$  e  $\Pi(d\mathbf{x})$  saranno diagonali sulla medesima base.

Ponendo  $y = |\mathbf{y}|$  e definendo  $R_{\mathbf{y}}$  come la rotazione dello spazio tridimensionale che porta il vettore  $\mathbf{y}$  a coincidere con l'asse  $\mathbf{k}$ , sfruttando le proprietà di trasformazione dell'operatore vettoriale  $\mathbf{J}$ , si ottiene:

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{J} = y[R_{\mathbf{y}}^{-1}\mathbf{k}] \cdot \mathbf{J} = y\mathbf{k} \cdot [R_{\mathbf{y}}\mathbf{J}] = U^\dagger(\mathbf{y})yJ_3U(\mathbf{y}),$$

da cui

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{x}) &= N \int d^3\mathbf{y} e^{2i(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{y}})y} U^\dagger(\mathbf{y}) e^{-ityJ_3} U(\mathbf{y}) e^{-\lambda^2y} = \\ &= N \sum_m \int d\mathbf{n} U^\dagger(\mathbf{n}) |m\rangle \langle m| U(\mathbf{n}) \int_0^\infty dy e^{-imty + 2i\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}y} y^2 e^{-\lambda^2y^2} = \\ &= N \sum_m \int d\mathbf{n} U^\dagger(\mathbf{n}) |m\rangle \langle m| U(\mathbf{n}) \times \\ &\times \left[ \sqrt{\pi} \frac{2\lambda^2 - (2\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - mt)^2}{8\lambda^5} \exp\left(\frac{-(2\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - mt)^2}{4\lambda^2}\right) + i\beta \right].\end{aligned}\quad (2.27)$$

Per calcolare l'integrale in  $y$  si è utilizzato un integrale tabulato in [14]:

$$\int_0^\infty dy y^2 e^{-p^2 y} e^{i a y} = \sqrt{\pi} \frac{2p^2 - a^2}{8p^5} e^{\frac{-a^2}{4p^2}} + i(\dots), \quad (2.28)$$

con le ovvie sostituzioni

$$p \leftarrow \lambda, \quad a \leftarrow (2\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - mt).$$

Si sa a priori che la parte immaginaria dell'integrale è nulla, perché è immediato verificare con un cambio di variabile che

$$\Omega(\mathbf{x}) = \Omega^\dagger(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

e che quindi  $\Omega(\mathbf{x})$  deve essere reale.

Per quanto detto circa la covarianza di  $\Omega(\mathbf{x})$ , è sufficiente portare a termine tutti i calcoli nel caso  $\mathbf{x} \parallel \mathbf{k}$ : il risultato per tutte le altre direzioni del vettore  $\mathbf{x}$  può essere ricostruito con l'applicazione di una semplice rotazione. Poiché  $\Omega(x\mathbf{k})$  sarà diagonale sugli stati  $|m\rangle$ , non resta che calcolarne per ogni  $m$  il valore di aspettazione sull'autovettore corrispondente. Usando l'espressione precedente si scrive:

$$\begin{aligned} \langle m' | \Omega(x\mathbf{k}) | m' \rangle &= N \sum_m \int d\mathbf{n} |\langle m | U(\mathbf{n}) | m' \rangle|^2 \times \\ &\times \sqrt{\pi} \frac{2\lambda^2 - (2x\alpha - mt)^2}{8\lambda^5} \exp\left(\frac{-(2x\alpha - mt)^2}{4\lambda^2}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove  $\alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = \cos \vartheta$ .

Riportiamo dal primo capitolo l'espressione di  $\langle m | U(\mathbf{n}_{(\vartheta, \varphi)}) | m' \rangle$  ricordando che si è definito  $\xi = -\tan \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \langle m | U(\mathbf{n}_{(\vartheta, \varphi)}) | m' \rangle &= \left[ \frac{(j+m)!(j-l)!}{(j-m)!(j+l)!} \right]^{1/2} \xi^m (-\bar{\xi})^{m'} \times \\ &\times \sum_{l=-j}^{\min(m, m')} \left( -\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \right)^l \frac{(j-l)!}{(j+l)!(m-l)!(m'+l)!}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} |\langle m | U(\mathbf{n}_{(\vartheta, \varphi)}) | m' \rangle|^2 &= \left[ \frac{(j+m)!(j-l)!}{(j-m)!(j+l)!} \right] \left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^{m+m'} \times \\ &\times \left[ \sum_{l=-j}^{\min(m, m')} \left( \frac{2}{\alpha-1} \right)^l \frac{(j-l)!}{(j+l)!(m-l)!(m'+l)!} \right]^2 = \\ &= g_{m'}^m(\alpha), \end{aligned} \quad (2.31)$$

dove si è fatto uso delle formule trigonometriche di bisezione per scrivere:

$$|\xi|^2 = \tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Si vede che tutto l'integrando dipende unicamente dalla variabile  $\alpha = \cos \vartheta$ ; allora è possibile integrare immediatamente sulla variabile  $\varphi$  ottenendo un fattore  $2\pi$ , e riscrivere l'integrale rimanente in  $\sin \vartheta d\vartheta$  come integrale tra  $-1$  e  $1$  in  $d\alpha$ :

$$\langle m' | \Omega(x\mathbf{k}) | m' \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \lambda^{3/2} \sum_m \int_{-1}^1 d\alpha g_{m'}^m(\alpha) (-1)^{\frac{1}{x^2\lambda}} \partial_\alpha^2 f(\alpha), \quad (2.32)$$

dove si è definita  $f(\alpha) = \exp\left(\frac{-(2\alpha x - mt)^2}{4\lambda^2}\right)$  e si è osservato che:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha f(\alpha) &= -\frac{4x}{4\lambda^2} (2\alpha x - mt) \exp\left(\frac{-(2\alpha x - mt)^2}{4\lambda^2}\right), \\ \partial_\alpha^2 f(\alpha) &= -\frac{x^2}{\lambda^4} [2\lambda^2 - (2\alpha x - mt)^2] \exp\left(\frac{-(2\alpha x - mt)^2}{4\lambda^2}\right), \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{2\lambda^2 - (2\alpha x - mt)^2}{\lambda^5} \exp\left(\frac{-(2\alpha x - mt)^2}{4\lambda^2}\right) = -\frac{1}{x^2\lambda} \partial_\alpha^2 \exp\left(\frac{-(2\alpha x - mt)^2}{4\lambda^2}\right).$$

È necessario calcolare nel limite di  $\lambda \rightarrow 0$  l'integrale di  $\partial_\alpha^2 f(\alpha)$  per una funzione  $g(\alpha)$ ; integrando per parti si vede immediatamente che:

$$\int g \partial^2 f = g \partial f - \partial g f + \int \partial^2 g f.$$

Ora va valutato l'ordine di grandezza in  $1/\lambda$  dei tre termini nel limite  $\lambda \rightarrow 0$ , ricordando che  $g$  non dipende da  $\lambda$ . Il termine con  $\partial f$  sarà del tipo  $\mathcal{O}(1/\lambda)e^{\dots}$ : infatti, data la presenza dell'esponenziale, nel limite si può considerare il fattore  $(2\alpha x - mt)$  di ordine  $\lambda$ . I termini con la sola  $f$  saranno del tipo  $e^{\dots}$ , quindi trascurabili rispetto al primo.

Si può finalmente concludere che:

$$\begin{aligned} \langle m' | \Omega(x\mathbf{k}) | m' \rangle &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/4} \lambda^{3/2} \sum_m |\langle m | U(\mathbf{n}) | m' \rangle|^2 \frac{1}{x^2\lambda} \frac{x}{\lambda^2} \times \\ &\times (2x \cos \vartheta_{\mathbf{n}} - mt) \exp\left[-\frac{(2x \cos \vartheta_{\mathbf{n}} - mt)^2}{4\lambda^2}\right] \Big|_{\mathbf{n}=-\mathbf{k}}^{\mathbf{n}=\mathbf{k}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/4} \frac{2x - m't}{x\lambda^{3/2}} \exp\left[\frac{-(2x - m't)^2}{4\lambda^2}\right], \quad (2.33) \end{aligned}$$

dove si è usato

$$|\langle m|U(\pm\mathbf{k})|m'\rangle|^2 = \delta_{m,\pm m'}.$$

Da quanto detto sinora si ricava:

$$\begin{aligned} \langle m|\Omega^\dagger(x\mathbf{k})\Omega(x\mathbf{k})|m\rangle &= \frac{1}{\pi x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda^3} (2x - mt)^2 \exp\left[-\frac{(2x - mt)^2}{2\lambda^2}\right] = \\ &= \frac{1}{\pi x^2} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} + \frac{\lambda}{4\sqrt{2\pi}} \partial_x^2 \right) \exp\left[-\frac{(2x - mt)^2}{2\lambda^2}\right] \\ &\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\pi x^2} \delta(2x - mt), & \text{per } mt \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi x^2} \delta(2x), & \text{per } mt = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

dove si è sfruttato il fatto che  $\Omega^\dagger(x\mathbf{k}) = \Omega(x\mathbf{k})$  e sono entrambi diagonalizzati sulla base degli  $|m\rangle$ . La convergenza è intesa in senso distribuzionale; la separazione del caso  $m = 0$  è dovuta al fatto che tutte le espressioni date sono definite per  $x \geq 0$ , e di conseguenza nel caso  $m = 0$  sotto una eventuale integrazione viene coinvolta solo metà della gaussiana nella somma nell'equazione (2.34), fornendo il fattore 1/2. Per lo stesso motivo, considerato che per comodità si sceglierà  $t < 0$ , gli elementi di matrice per  $m > 0$  saranno nulli.

Finalmente è possibile scrivere la POVM e lo strumento che risultano da questo modello di misurazione nel limite di  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \Pi(d\mathbf{x}) &= U^\dagger(\mathbf{n})\Omega^\dagger(x\mathbf{k})\Omega(x\mathbf{k})U(\mathbf{n})x^2 dx d\mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \leq 0} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{m,0}\right) \delta\left(x - \frac{mt}{2}\right) |\mathbf{n}, m\rangle \langle \mathbf{n}, m| dx d\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove  $\mathbf{x} = x\mathbf{n}$ .

Si nota come solo i vettori  $\mathbf{x}$  appartenenti alle sfere di raggio  $mt/2$  hanno probabilità non nulla di essere misurati. In corrispondenza di questi vettori l'operatore  $\Omega(\frac{mt}{2}\mathbf{n})$  ha autovalore non nullo solo sugli stati  $|\mathbf{n}, m\rangle$ , il che consente di scrivere lo strumento:

$$\begin{aligned} I_{x\mathbf{n}}(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \leq 0} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{m,0}\right) \delta\left(x - \frac{mt}{2}\right) \langle \mathbf{n}, m|\rho|\mathbf{n}, m\rangle \times \\ &\times |\mathbf{n}, m\rangle \langle \mathbf{n}, m| dx d\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

il quale, in corrispondenza del risultato  $\mathbf{x} = x\mathbf{n}$ , proietta qualsiasi stato iniziale sullo stato coerente  $|\mathbf{n}, m = 2x/t\rangle$ .

Per  $j = 1/2$  lo schema di misurazione presentato realizza la POVM di Arecchi, infatti la POVM marginale ottenuta integrando sulla variabile  $x$  è

$$\Pi'(d\mathbf{n}) = \frac{1}{2\pi} |\mathbf{n}, -1/2\rangle \langle \mathbf{n}, -1/2| d\mathbf{n}. \quad (2.37)$$

Per  $j \neq 1/2$  purtroppo non si hanno gli stessi risultati: la POVM marginale coinvolge gli stati coerenti costruiti a partire da qualunque  $m \leq 0$  e non solo da  $m = -j$ .

La gravità di questo problema, più che nella mancata realizzazione della POVM di Arecchi, sta nel fatto che non si conoscono le funzioni  $\mathbf{P}_m(\mathbf{n})$  tali che:

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{P}_m(\mathbf{n}) |\mathbf{n}, m\rangle \langle \mathbf{n}, m| d\mathbf{n}, \quad (2.38)$$

quindi non è possibile dare un'indicazione della direzione dello spin, se non nel caso in cui il risultato  $\mathbf{x}$  abbia modulo pari a  $-jt/2$ .

Comunque sia, il fatto che si sia riusciti a realizzare la POVM per spin 1/2 può essere considerato già un successo, viste le difficoltà che oggettivamente si incontrano nel tentativo di risolvere il problema più in generale. A testimonianza di questo, si osserva come siano stati diversi i tentativi volti a realizzare la POVM di Arecchi, ad esempio si consideri l'articolo di Appleby [15].

# Capitolo 3

## Misurazioni di Bell

La chiave di questo capitolo è il concetto di entanglement, partendo dalla sua definizione si arriva a delinearne alcune proprietà e a valutarne il possibile utilizzo come risorsa per il teletrasporto. Infine si caratterizzeranno le misurazioni che realizzano proprio il teletrasporto.

### 3.1 Preliminari

#### Notazione per stati di un sistema composto

Nel corso di questo capitolo si introduce un particolare formalismo per indicare gli stati di un sistema composto che risulta essere estremamente efficace. Sia  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  lo spazio di Hilbert relativo al sistema composto dai sottosistemi  $S_1$  ed  $S_2$ . Un qualsiasi vettore di  $\mathcal{H}$  è in corrispondenza biunivoca con una matrice  $\dim(\mathcal{H}_1) \times \dim(\mathcal{H}_2)$ , infatti:

$$|\psi\rangle\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle_1 |j\rangle_2 \doteq |C\rangle\rangle, \quad (3.1)$$

dove ovviamente  $(C)_{ij} = c_{ij}$ .

Con questa notazione, il risultato dell'applicazione di un operatore fattorizzato sui due sottosistemi ad un qualunque stato si esprime semplicemente come:

$$A \otimes B |C\rangle\rangle = \sum_{l,m,i,j} a_{li} b_{mj} c_{ij} |l\rangle_1 |m\rangle_2 = |ACB^T\rangle\rangle. \quad (3.2)$$

Analogamente, poiché

$$\langle\langle C| = \sum_{ij} c_{ij}^* \langle i|_1 \langle j|_2,$$

risulta:

$$\langle\langle A|B \rangle\rangle = \sum_{ij} a_{ij}^* b_{ij} = \text{Tr}[A^\dagger B]. \quad (3.3)$$

Si farà uso anche delle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_2 \left[ |A\rangle\rangle_{12} \langle\langle B| \right] &= a_{ij} b_{ij}^* |i\rangle_{11} \langle l| = A_1 B_1^\dagger, \\ \text{Tr}_1 \left[ |A\rangle\rangle_{12} \langle\langle B| \right] &= a_{ij} b_{im}^* |j\rangle_{22} \langle m| = A_2^T B_2^*, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove si è usata la convenzione della sommatoria sottointesa sugli indici ripetuti, come spesso si farà ancora.

Queste semplici relazioni snelliscono notevolmente la notazione rendendo evidenti proprietà altrimenti non facilmente riconoscibili.

### Operazioni quantistiche

Il più generale cambiamento di stato di un sistema fisico può essere descritto per mezzo delle operazioni quantistiche. Ogni operazione è in corrispondenza con una mappa  $\mathcal{E}$  lineare completamente positiva che non incrementa la traccia e il cambiamento di stato ad essa dovuto è espresso come:

$$\rho \longrightarrow \frac{\mathcal{E}(\rho)}{\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)]}. \quad (3.5)$$

Limitandosi al caso di spazi di Hilbert finito dimensionali, si può dimostrare che per ogni  $\mathcal{E}$  esiste un insieme di operatori  $A_i$  tali che:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \sum_i A_i \rho A_i^\dagger, \\ \sum_i A_i^\dagger A_i &\leq \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Una operazione è detta ideale o pura se mantiene puro un qualsiasi stato puro, ovvero se può essere espressa in termini di un solo operatore  $A$  per il quale:

$$\mathcal{E}(\rho) = A \rho A^\dagger. \quad (3.7)$$

Le operazioni quantistiche intervengono anche nella descrizione di una misurazione, perché la riduzione di stato è un cambiamento dello stato e quindi deve essere esprimibile attraverso esse. In effetti lo strumento associato ad uno schema di misurazione è un insieme di operazioni quantistiche che riducono lo stato a seconda del risultato. Facendo riferimento alla (1.11), per un risultato  $x$  fissato gli operatori  $\Omega_i(x)$  corrispondono agli  $A_i$  della (3.6), e la purezza di uno strumento equivale alla purezza delle operazioni che lo compongono.

## 3.2 Entanglement

Ogni stato di un sistema composto  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  può essere posto nella forma di Schmidt che ricaveremo qui di seguito. Sia  $U$  la trasformazione unitaria di  $\mathcal{H}_1$  tale che  $UAA^\dagger U^\dagger$  risulti diagonale, si può scrivere:

$$|A\rangle\rangle = U^\dagger \otimes \mathbb{1} |UA\rangle\rangle = |UA\rangle\rangle' = (UA)_{ij} |i\rangle_1' |j\rangle_2.$$

Definendo  $|\tilde{i}\rangle_2'' = (UA)_{ij} |j\rangle_2$  si verifica che:

$${}_2\langle\tilde{l}|\tilde{i}\rangle_2'' = \left( UAA^\dagger U^\dagger \right)_{il} = \lambda_i \delta_{il},$$

dove  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $AA^\dagger$ . Questi vettori sono quindi ortogonali. Se  $\lambda_i \neq 0$ , il corrispondente vettore  $|\tilde{i}\rangle_2''$  può essere normalizzato a dare  $|i\rangle_2''$  tale che

$$|\tilde{i}\rangle_2'' = \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_2''.$$

Sostituendo questo risultato nella prima equazione della sezione:

$$|A\rangle\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_1' |i\rangle_2''. \quad (3.8)$$

I termini corrispondenti a  $\lambda_i = 0$  non compaiono “automaticamente” nella somma.

Come ultimo commento a questo risultato si vuole sottolineare come gli autovalori non nulli  $\lambda_i$  della matrice  $AA^\dagger$  definita su  $\mathcal{H}_1$  siano uguali agli autovalori non nulli della matrice  $A^T A^*$  definita su  $\mathcal{H}_2$ , inoltre gli stati  $|i\rangle_1'$  e  $|i\rangle_2''$  sono gli autovettori dell'una e dell'altra rispettivamente, relativi al medesimo autovalore  $\lambda_i$ , perché:

$$\begin{aligned} AA^\dagger |i\rangle_1' &= U^\dagger UAA^\dagger U^\dagger |i\rangle_1 = U^\dagger \lambda_i |i\rangle_1 = \lambda_i |i\rangle_1', \\ A^T A^* |i\rangle_2'' &= A^T A^* (UA)_{ij} |j\rangle_2 = (A^T A^*)_{lj} (UA)_{ij} |l\rangle_2 = \\ &= (UAA^\dagger A)_{il} |l\rangle_2 = (UAA^\dagger U^\dagger)_{ih} (UA)_{hl} |l\rangle_2 = \\ &= \lambda_i \delta_{ih} (UA)_{hl} |l\rangle_2 = \lambda_i |i\rangle_2'', \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove si è fatto uso di  $(A^T A^*)_{lj} = (A^\dagger A)_{jl}$ , essendo  $A^T A^*$  autoaggiunta.

Un altro modo per dimostrare questa proprietà è osservare che  $A^T A^*$  e  $AA^\dagger$  sono rispettivamente la traccia parziale dello stato  $|A\rangle\rangle_{12}$  sugli spazi  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , quindi, calcolando la traccia dopo aver scelto le basi che pongono  $|A\rangle\rangle_{12}$  in forma di Schmidt, risulta evidente come le due abbiano medesimi autovalori non nulli.

A questo punto si definisce numero di Schmidt dello stato  $|A\rangle\rangle$  il numero di termini diversi da zero che compaiono nella (3.8), ovvero la dimensione dell'immagine della mappa lineare associata ad  $A$ .

Uno stato  $|A\rangle\rangle$  è entangled se ha numero di Schmidt maggiore di uno, altrimenti è detto separabile, nel qual caso è della forma  $|\psi\rangle_1|\varphi\rangle_2$  e la sua traccia parziale su  $\mathcal{H}_1$  o  $\mathcal{H}_2$  dà rispettivamente  $|\varphi\rangle_2$  e  $|\psi\rangle_1$ .

Gli stati entangled sono quanto di più interessante ci possa essere nella meccanica quantistica, stanno alla base del teletrasporto, dei protocolli di comunicazione sicura, dei computer quantistici. La peculiarità degli stati entangled è la loro capacità di contenere correlazioni tra i due sistemi non riconducibili a correlazioni di tipo classico.

Ad esempio, supponendo che gli sperimentatori A e B abbiano ciascuno a disposizione uno spin 1/2, è possibile creare uno stato correlato del sistema composto dai due spin consentendo la comunicazione tra A e B e lasciando che i due sperimentatori agiscano localmente sul proprio sistema. I due sperimentatori potrebbero accordarsi per preparare lo stato  $|+\rangle_A|+\rangle_B$ , dove  $|+\rangle$  è l'autostato relativo all'autovalore 1 dell'operatore  $\sigma_z$ . Questo tipo di correlazioni esistono anche per sistemi classici, perché possono essere istituite con operazioni locali sincronizzate con scambio di informazione.

Se si prende in esame lo stato entangled  $\frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_1|+\rangle_2 + |-\rangle_1|-\rangle_2]$ , si vede come i risultati della misurazione di  $\sigma_z$  su uno e sull'altro sottosistema siano perfettamente correlati, ma, a differenza del caso precedente, non sono affatto predeterminati, in poche parole sono casuali. Oltre a questo è fondamentale osservare come uno stato entangled non sia preparabile con sole operazioni locali sui sottosistemi, perché il numero di Schmidt di uno stato non aumenta agendo su questo con operazioni locali. Per dimostrarlo è sufficiente considerare due qualsiasi operazioni locali pure associate rispettivamente agli operatori  $L$  e  $M$  di  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , e scrivere il cambiamento di stato ad esse dovuto:

$$\begin{aligned} |A\rangle\rangle\langle\langle A| &\longrightarrow \frac{1}{Tr[\dots]} L \otimes M |A\rangle\rangle\langle\langle A| L^\dagger \otimes M^\dagger = \\ &= \frac{|LAM^T\rangle\rangle\langle\langle LAM^T|}{Tr[LAM^T M^* A^\dagger L^\dagger]}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

poiché la dimensione dell'immagine di  $LAM^T$  è minore o uguale di quella di  $A$  il numero di Schmidt dello stato non verrà aumentato.

Insomma, partendo da uno stato fattorizzato non si potrà mai arrivare ad uno stato entangled: l'unico modo per preparare uno stato entangled è esegui-

re una operazione che non sia locale, ovvero che non sia fattorizzabile sui due sottosistemi.

Ora ci si pone il problema di quantificare quanto sia entangled uno stato, al fine di valutarne la qualità come risorsa per realizzare teletrasporto, protocolli di comunicazione o calcolatori quantistici. Consistentemente con quanto detto prima, la qualità non potrà aumentare sotto l'azione di operazioni locali.

Uno stato puro  $|\psi\rangle\rangle$  di un sistema bipartito  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  è massimamente entangled se la traccia parziale su uno dei due sottosistemi dà l'identità sull'altro, a meno di un fattore. Questo tipo di stato è usato come punto di partenza per sviluppare protocolli di vario genere, ad esempio il teletrasporto, che funzionano in modo ideale solo sfruttando entangled massimali. Per questa ragione tali stati vengono considerati come termine di paragone per valutare il grado di entanglement di altri stati.

Il fatto che uno stato massimamente entangled visto su una sola porzione del sistema corrisponda ad uno stato totalmente indeterminato, quindi con entropia massima, suggerisce che appunto l'entropia dello stato ridotto su un sottosistema sia la giusta misura del grado di entanglement di uno stato puro:

$$E(|\psi\rangle\rangle_{12}) = S(\rho_1), \text{ dove } \rho_1 = Tr_2[|\psi\rangle\rangle\langle\langle\psi|], \quad S(\rho) \doteq -Tr[\rho \log_N(\rho)]. \quad (3.11)$$

Pre quanto detto circa la forma di Schmidt di uno stato, appare evidente come l'entropia non dipenda dalla scelta dello spazio di Hilbert su cui tracciare. Si sceglie come base del logaritmo la dimensione  $N$  dello spazio di Hilbert in gioco affinché il grado di entanglement sia correttamente normalizzato per le considerazioni che seguiranno. Anzitutto, con questa scelta il grado di entanglement è compreso tra 0 e 1, valori per quali lo stato sarà rispettivamente fattorizzato e massimamente entangled.

Disponendo di  $n$  copie di uno stato entangled  $|\psi\rangle\rangle$  è possibile “distillare” con buona *fidelity* e alta probabilità di successo un numero massimo  $k_{max}(n)$  di stati massimamente entangled, usando esclusivamente operazioni locali e consentendo lo scambio di informazione. Viceversa, con un numero minimo  $k_{min}(n)$  di stati massimamente entangled si possono preparare  $n$  copie di stati  $|\psi\rangle\rangle$ , sempre agendo localmente con scambio di informazione. Usando la compressione di Schumacher ed il teletrasporto (cfr. [20]), è possibile dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{min}(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{max}(n)}{n} = E(|\psi\rangle\rangle). \quad (3.12)$$

Alla luce di questa proprietà la (3.11) risulta ben definita e motivata: tanto più uno stato è entangled, tanti più stati massimamente entangled riuscirò a

distillare da sue repliche. Inoltre si ritrova correttamente che il grado di entanglement non può essere aumentato attraverso operazioni locali sullo stato seppure “sincronizzate” da uno scambio di informazione classica.

La definizione di una misura del grado di entanglement per stati misti di un sistema bipartito è argomento di attuale ricerca. Come per gli stati puri, da un numero minimo  $k_{min}(n)$  di stati massimamente entangled si possono preparare con buone fidelity e probabilità  $n$  copie di uno stato  $\rho_{12}$  attraverso operazioni locali e scambio di informazione classica. È quindi possibile definire l’*entanglement di formazione*:

$$F(\rho_{12}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{min}(n)}{n}. \quad (3.13)$$

Analogamente, se posso distillare un massimo di  $k_{max}(n)$  stati massimamente entangled da  $n$  copie dello stato  $\rho_{12}$  con operazioni locali, allora potrò definire l’*entanglement di distillazione*:

$$D(\rho_{12}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{max}(n)}{n}. \quad (3.14)$$

Contrariamente a quanto fatto per gli stati puri, non è stato dimostrato che l’entanglement di formazione sia uguale a quello di distillazione, perciò questo modo di definire il grado di entanglement potrebbe non essere corretto.

Attualmente si sta cercando di definire una sorta di distanza tra due stati di un sistema bipartito, ovvero una funzione  $d(\rho, \sigma) \geq 0$ , con  $d(\rho, \rho) = 0$ , la quale sia non decrescente per l’azione delle stesse operazioni locali su  $\rho$  e  $\sigma$ . Il grado di entanglement di uno stato  $\rho$  verrebbe definito come:

$$E(\rho) = \inf_{\sigma \in \mathcal{D}} d(\rho, \sigma), \quad (3.15)$$

dove  $\mathcal{D}$  è l’insieme degli stati del sistema bipartito che sono combinazioni lineari convesse di stati puri fattorizzati. Come bibliografia circa le problematiche della purificazione dell’entanglement e della definizione di una misura si faccia riferimento agli articoli [17], [16], [18], [19].

### 3.2.1 Proprietà degli stati massimamente entangled

Ricordando che uno stato è massimamente entangled se ha traccia parziale su ciascuno dei due spazi proporzionale all’identità, si vogliono caratterizzare le matrici  $A$  tali che  $|A\rangle\rangle$  è massimamente entangled:

$$\begin{aligned} Tr_1 \left[ |A\rangle\rangle \langle\langle A| \right] &= (A^T A^*)^{(2)} = \lambda \mathbb{1}_2, \\ Tr_2 \left[ |A\rangle\rangle \langle\langle A| \right] &= (A A^\dagger)^{(1)} = \lambda \mathbb{1}_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Da qui si vede che  $A = \sqrt{\lambda}U$  dove  $U$  è unitario, ovvero che gli stati massimamente entangled sono della forma:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}|U\rangle\rangle, \quad \text{con } U \text{ unitario, } N=\dim(\mathcal{H}). \quad (3.17)$$

D'altra parte un qualsiasi stato della forma data è massimamente entangled perché, ripercorrendo i passaggi appena svolti, la sua traccia parziale dà l'identità grazie all'unitarietà di  $U$ . Quindi gli stati massimamente entangled sono tutti e soli gli stati della forma espressa dalla (3.17).

Grazie alla (3.2) si dimostrano agevolmente tutte le proprietà che seguono.

Due qualsiasi stati massimamente entangled sono connessi da una trasformazione unitaria locale:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}|U_1\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}U_1 \otimes \mathbb{1}|\mathbb{1}\rangle\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{N}}|\mathbb{1}\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}U_2^\dagger \otimes \mathbb{1}|U_2\rangle\rangle,$$

e quindi:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}|U_1\rangle\rangle = (U_1U_2^\dagger) \otimes \mathbb{1} \frac{1}{\sqrt{N}}|U_2\rangle\rangle. \quad (3.18)$$

L'unico stato invariante per l'azione di  $U \otimes U^*$  per  $\forall U$  su  $\mathcal{H}$  è lo stato detto *massimamente entangled standard*, cioè:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}|\mathbb{1}\rangle\rangle.$$

L'affermazione si traduce infatti come:

$$U \otimes U^*|A\rangle\rangle = |UAU^\dagger\rangle\rangle = |A\rangle\rangle, \quad \forall U,$$

da cui  $A = \lambda\mathbb{1}$ , dove, per avere la normalizzazione corretta, si deve imporre  $|\lambda|^2 = 1/N$ .

Dato un gruppo  $\mathbf{G}$  che abbia UIR  $N$ -dimensionale, l'unico stato invariante per  $U_g \otimes U_g^*$  per  $\forall g \in \mathbf{G}$  è  $\frac{1}{\sqrt{N}}|\mathbb{1}\rangle\rangle$ : basta infatti ripetere i passaggi precedenti, applicando nell'ultimo passaggio il primo lemma di Schur.

Dato un gruppo  $\mathbf{G}$  con UIR  $N$ -dimensionale, detta  $\mu$  la sua misura normalizzata come richiesto dalla (1.22), si ha:

$$\int_{\mathbf{G}} U_g \otimes U_g^* \mu(dg) = |\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}|; \quad (3.19)$$

infatti:

$$\begin{aligned} \langle l|_1 \langle m|_2 \int_{\mathbf{G}} \mu(dg) U_g \otimes U_g^* |i\rangle_1 |j\rangle_2 &= \langle l|_1 \langle m|_2 \int_{\mathbf{G}} \mu(dg) U_g \otimes U_g^* |i\rangle \langle j| \rangle = \\ &= \langle l|_1 \langle m|_2 \int_{\mathbf{G}} \mu(g) U_g |i\rangle \langle j| U_g^\dagger \rangle = \\ &= \delta_{ij} \langle l|_1 \langle m|_2 |\mathbb{1}\rangle\rangle = \delta_{ij} \delta_{lm}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

dove per il primo passaggio si è fatto uso della (3.2) e per il secondo della (1.22).

L'importanza di questa identità sta nel fatto che essa esegue la scomposizione del proiettore sullo stato massimamente entangled in una somma di termini fattorizzati, cosa che può tornare utile nei calcoli.

### 3.2.2 Alcune applicazioni dell'entanglement

Per illustrare le potenzialità dell'uso degli stati entangled verranno presentati alcuni esempi da tempo noti. Per un'ampia bibliografia a riguardo si faccia riferimento alle note del Preskill [20].

#### Distribuzione quantistica chiavi

Alice e Bob vogliono comunicare in modo sicuro, cioè in modo che nessun'altro possa decifrare i messaggi che si scambiano, e per fare questo devono condividere una chiave segreta, ovvero una stringa di bit nota solo a loro. Alice suddivide il proprio messaggio in stringhe di bit di lunghezza pari a quella della chiave, costruisce un nuovo messaggio sommando modulo due la chiave ad ogni segmento e poi invia il messaggio così criptato a Bob. Per decifrare ciò che ha ricevuto, Bob semplicemente ripete le operazioni eseguite da Alice sul messaggio da lei inviatogli, ricavandone il messaggio originale. Questo schema è sicuro perché il messaggio trasmesso non contiene informazione, essendo questa codificata nella correlazione tra chiave e segmenti trasmessi.

L'unico problema resta lo scambio della chiave tra Alice e Bob. Negli ultimi anni sono stati inventati protocolli per lo scambio di chiavi che prevedono la trasmissione di informazione classica e fanno affidamento sull'attuale impossibilità pratica di fattorizzare numeri molto grandi e sulla relativa semplicità della verifica della correttezza di una data fattorizzazione, ma la loro robustezza non è stata dimostrata. Utilizzando l'entanglement invece è possibile scambiarsi chiavi in modo del tutto sicuro.

Alice e Bob si procurano un alto numero di coppie di spin  $1/2$  nello stato massimamente entangled di singoletto:

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B \right). \quad (3.21)$$

Per ogni coppia, ciascuno sceglie con probabilità  $1/2$  di misurare  $\sigma_1$  o  $\sigma_3$ , comunicando pubblicamente la propria scelta. Ogni volta che i due misurano la stessa osservabile sulla stessa coppia otterranno risultati in  $\{-1, +1\}$  anticorrelati

e random, i quali andranno a costruire una chiave di bit random che solo Alice e Bob potranno conoscere.

Questo funziona nel caso in cui si è certi che nessuna spia Eve (nome assegnato generalmente alla spia dagli informatici quantistici) abbia fatto interagire il suo sistema E correlandolo con le coppie condivise da A e B. Infatti, se così fosse, il generico stato del sistema ABE sarebbe della forma:

$$\begin{aligned} |\xi\rangle_{ABE} &= |++\rangle_{AB}|e_{++}\rangle_E + |+-\rangle_{AB}|e_{+-}\rangle_E + \\ &+ |--\rangle_{AB}|e_{--}\rangle_E + |-+\rangle_{AB}|e_{-+}\rangle_E, \end{aligned}$$

dove i coefficienti delle combinazioni lineari sono contenuti nei ket  $|e_{...}\rangle_E$ .

Alice e Bob possono controllare che lo stato in loro possesso sia effettivamente  $|\psi^-\rangle$  misurando prima  $\sigma_1^{(A)} \otimes \sigma_2^{(B)}$  e poi  $\sigma_3^{(A)} \otimes \sigma_3^{(B)}$  e controllando di avere sempre il risultato -1. Infatti lo stato  $|\psi\rangle$  è autostato relativo all'autovalore -1 sia di una che dell'altra osservabile, imponendo questa condizione a  $|\psi\rangle$  si trova:

$$\begin{aligned} \sigma_3^{(A)} \sigma_3^{(B)} \otimes \mathbb{1}_E |\xi\rangle_{ABE} &= |++\rangle_{AB}|e_{++}\rangle_E - |+-\rangle_{AB}|e_{+-}\rangle_E + \\ &+ |--\rangle_{AB}|e_{--}\rangle_E - |-+\rangle_{AB}|e_{-+}\rangle_E = -|\xi\rangle_{ABE}, \end{aligned}$$

da cui preliminarmente

$$|\xi\rangle_{ABE} = |+-\rangle_{AB}|e_{+-}\rangle_E + |-+\rangle_{AB}|e_{-+}\rangle_E;$$

imponendo la rimanente condizione a questo stato si ha:

$$\sigma_1^{(A)} \sigma_1^{(B)} \otimes \mathbb{1}_E |\xi\rangle_{ABE} = |-+\rangle_{AB}|e_{+-}\rangle_E + |+-\rangle_{AB}|e_{-+}\rangle_E = -|\xi\rangle_{ABE},$$

da cui finalmente:

$$|\xi\rangle_{ABE} = |\psi\rangle_{AB}|e\rangle_E.$$

Ovviamente per eseguire questo controllo Alice e Bob devono confrontare i propri risultati su un canale insicuro, praticamente pubblicamente, sacrificando così una porzione della loro chiave segreta. Ciò nonostante, usando una chiave molto lunga e confrontandone una buona porzione scelta a caso, i due potranno avere un'alta probabilità che la loro chiave non sia stata intercettata.

Ci sono molti altri protocolli di distribuzione di chiavi, adatti a diverse necessità, i quali usano comunque come risorsa fondamentale l'entanglement.

### Teorema di non clonazione dello stato

L'origine della sicurezza intrinseca dei protocolli di comunicazione quantistici risiede nella impossibilità acquisire informazione per distinguere stati non ortogonali senza disturbarli. Infatti, se  $|\psi\rangle$  e  $|\varphi\rangle$  sono due stati non ortogonali e  $U$  è una trasformazione unitaria definita sullo spazio  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$  tale che:

$$U|\psi\rangle|0\rangle_E = |\psi\rangle|a\rangle_E, \quad U|\varphi\rangle|0\rangle_E = |\varphi\rangle|b\rangle_E,$$

poiché  $U$  conserva i prodotti scalari si ottiene:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle_E \langle a|b\rangle_E,$$

da cui, vista la non ortogonalità di  $|\psi\rangle$  e  $|\varphi\rangle$ :

$$|a\rangle_E = |b\rangle_E.$$

Da questo risultato si capisce come nessuna interazione che non disturbi gli stati in esame possa trasferire da uno spazio di Hilbert ad un altro informazione utile a distinguere due stati non ortogonali.

Per rafforzare questa affermazione si può dimostrare molto semplicemente il teorema di non clonazione (*no cloning*): nessuna trasformazione unitaria può copiare da uno spazio ad un altro due stati distinti ma non ortogonali  $|\psi\rangle$  e  $|\varphi\rangle$ . Supponiamo infatti che la trasformazione unitaria  $U$  definita su  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$  sia tale che:

$$U|\psi\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_E = |\psi\rangle_A|\psi\rangle_B|a\rangle_E,$$

$$U|\varphi\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_E = |\varphi\rangle_A|\varphi\rangle_B|b\rangle_E.$$

Allora si ha:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = {}_A\langle\psi|\varphi\rangle_A {}_B\langle\psi|\varphi\rangle_B {}_E\langle a|b\rangle_E;$$

dato che  $|\psi\rangle$  e  $|\varphi\rangle$  non sono ortogonali fra loro si può scrivere che

$${}_B\langle\psi|\varphi\rangle_B {}_E\langle a|b\rangle_E = 1,$$

e quindi, poiché gli stati sono normalizzati e i loro prodotti scalari minori o uguali a 1, segue che  $|\langle\psi|\varphi\rangle| = 1$ , in contrasto con l'ipotesi che siano distinti.

## 3.3 Teletrasporto

L'applicazione dell'entanglement che più stimola l'immaginario collettivo è il teletrasporto. Formalmente il teletrasporto realizza il trasferimento di uno stato

incognito qualsiasi di un sistema fisico su un altro sistema simile, eventualmente spazialmente separato dal primo e comunque non interagente con esso.

La possibilità di realizzare il teletrasporto non è in contrasto con l'impossibilità di clonare uno stato. Infatti lo stato che viene trasferito è distrutto dal processo di teletrasporto, nel senso che sullo spazio di partenza rimane uno stato scorrelato dallo stato iniziale, sempre che qualcosa rimanga.

Il teletrasporto può essere visto come una misurazione indiretta nella quale una parte di preparazione del probe funge da stato incognito da teletrasportare e il teletrasporto vero e proprio avviene grazie alla *state reduction* dovuta alla misurazione, cui viene fatta seguire una trasformazione unitaria dipendente dal risultato della misura.

### 3.3.1 Il teletrasporto di

#### Bennett, Brassard, Crepeau, Jozsa, Peres, Wootters

Il primo schema di teletrasporto quantistico apparve su Physics Letters del '93 ad opera di Bennett et al. [21], in esso entrano in gioco tre sistemi di spin 1/2 descritti negli spazi  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_3$  in possesso rispettivamente di Carol, Alice e Bob.

I sistemi  $S_2$  e  $S_3$  sono preparati nello stato massimamente entangled corrispondente allo stato di tripletto con autovalore +1 dell'operatore  $J_3^{(2)} + J_3^{(3)}$ , cioè:

$$|\varphi^+\rangle\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle_2 |+\rangle_3 + |-\rangle_2 |-\rangle_3 \right],$$

mentre nello spazio  $\mathcal{H}_1$  è immagazzinato lo stato  $|\xi\rangle_1 = a|+\rangle_1 + b|-\rangle_1$  fornito da Carol ad Alice e che va teletrasportato sul sistema di Bob.

Alice esegue su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  la misurazione di un'osservabile non degenera che sia diagonale sulla base di Bell, ovvero sui vettori:

$$\begin{aligned} |\psi^\pm\rangle\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle_1 |-\rangle_2 \pm |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right], \\ |\varphi^\pm\rangle\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle_1 |+\rangle_2 \pm |-\rangle_1 |-\rangle_2 \right]; \end{aligned} \quad (3.22)$$

questa operazione proietterà lo stato di  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  su uno dei vettori della base di Bell.

Il risultato della misurazione viene poi trasmesso a Bob il quale esegue in  $\mathcal{H}_3$  una trasformazione unitaria dipendente da esso seguendo le regole:

$$\begin{aligned}
|\varphi^+\rangle_{12} &\rightarrow \mathbf{1}^{(3)}, \\
|\psi^+\rangle_{12} &\rightarrow \sigma_1^{(3)}, \\
|\psi^-\rangle_{12} &\rightarrow -i\sigma_2^{(3)}, \\
|\varphi^-\rangle_{12} &\rightarrow \sigma_3^{(3)}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Procedendo in questo modo, il sistema su cui opera Bob sarà alla fine nello stato  $|\xi\rangle_3$ , infatti:

$$\begin{aligned}
|\xi\rangle_1|\varphi^+\rangle_{23} &= [a|+\rangle_1 + b|-\rangle_1] \frac{1}{\sqrt{2}} [ |+\rangle_1|+\rangle_2 + |-\rangle_1|-\rangle_2 ] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [ a|+++ \rangle_{123} + a|+- - \rangle_{123} + b|-++ \rangle_{123} + b|-- - \rangle_{123} ] = \\
&= \frac{1}{2}a [ |\varphi^+\rangle_{12} + |\varphi^-\rangle_{12} ] |+\rangle_3 + \frac{1}{2}a [ |\psi^+\rangle_{12} + |\psi^-\rangle_{12} ] |-\rangle_3 + \\
&+ \frac{1}{2}b [ |\psi^+\rangle_{12} - |\psi^-\rangle_{12} ] |+\rangle_3 + \frac{1}{2}b [ |\varphi^+\rangle_{12} - |\varphi^-\rangle_{12} ] |-\rangle_3 = \\
&= \frac{1}{2}|\varphi^+\rangle_{12} [ a|+\rangle_3 + b|-\rangle_3 ] + \frac{1}{2}|\psi^+\rangle_{12} [ a|-\rangle_3 + b|+\rangle_3 ] + \\
&+ \frac{1}{2}|\psi^-\rangle_{12} [ a|-\rangle_3 - b|+\rangle_3 ] + \frac{1}{2}|\varphi^-\rangle_{12} [ a|+\rangle_3 - b|-\rangle_3 ] = \\
&= \frac{1}{2}|\varphi^+\rangle_{12}\mathbf{1}^{(3)}|\xi\rangle_3 + \frac{1}{2}|\psi^+\rangle_{12}\sigma_1^{(3)}|\xi\rangle_3 + \\
&+ \frac{1}{2}|\psi^-\rangle_{12}i\sigma_2^{(3)}|\xi\rangle_3 + \frac{1}{2}|\varphi^-\rangle_{12}\sigma_3^{(3)}|\xi\rangle_3.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Quindi la proiezione dovuta alla misura non fa altro che selezionare con egual probabilità uno dei quattro termini di quest'ultima equazione, mentre l'applicazione delle trasformazioni indicate dalla (3.23) porta lo stato del sistema di Bob a coincidere con quello fornito da Carol, poiché  $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$ .

### 3.3.2 Schema generale del teletrasporto con entanglement massimale

Traendo spunto da [22] e [24] e adattando quanto ivi illustrato mediante l'uso del formalismo "matrice-stato" proposto ad inizio capitolo, si può capire come funzionino gli schemi di teletrasporto con entanglement massimali.

Si consideri il prodotto tensore di tre spazi di Hilbert N-dimensionali  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$  con stato iniziale

$$\rho^{(123)} = \frac{1}{N}\rho^{(1)} \otimes |\mathbf{1}\rangle_{23} \langle\mathbf{1}|. \tag{3.25}$$

Eseguendo una misurazione su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  che abbia POVM a valore in proiettori su stati massimamente entangled di  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , se si ottiene il risultato relativo all'elemento  $\frac{1}{N}|U\rangle\rangle_{12}$  della POVM allora l'elemento dello strumento che dà la riduzione di stato su  $\mathcal{H}_3$  a seguito della misurazione sarà:

$$\begin{aligned}
I_U(\rho^{(1)}) &= \frac{1}{N} \text{Tr}_{12} \left[ \rho^{(1)} \otimes |\mathbb{1}\rangle\rangle_{23} \langle\langle \mathbb{1} | U \rangle\rangle_{12} \langle\langle U | \otimes \mathbb{1}_3 \right] = \\
&= \frac{1}{N} \text{Tr}_{12} \left[ \rho^{(1)} \otimes |\mathbb{1}\rangle\rangle_{23} \langle\langle \mathbb{1} | \times \right. \\
&\quad \left. \times U^{(1)} \otimes \mathbb{1}_{23} |\mathbb{1}\rangle\rangle_{12} \langle\langle \mathbb{1} | \otimes \mathbb{1}^{(3)} U^{(1)\dagger} \otimes \mathbb{1}_{23} \right] = \\
&= {}_{12}\langle\langle \mathbb{1} | U^{(1)\dagger} \rho^{(1)} U^{(1)} \otimes |\mathbb{1}\rangle\rangle_{23} \langle\langle \mathbb{1} | \mathbb{1} \rangle\rangle_{12} = \\
&= \mathcal{T}_{31} U^{(1)\dagger} \rho^{(1)} U^{(1)} \mathcal{T}_{13} = U^{(3)\dagger} \rho^{(3)} U^{(3)}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{T}_{31} = {}_{12}\langle\langle \mathbb{1} | \mathbb{1} \rangle\rangle_{23} = \sum_i |i\rangle\rangle_{31} \langle\langle i| \tag{3.27}$$

è il traspositore, mappa lineare che istituisce un isomorfismo tra  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_3$ .

Lo stato su  $\mathcal{H}_3$  dopo la misura sarà  $\sigma_{rid}^{(3)} = U^{(3)\dagger} \rho^{(3)} U^{(3)}$ , quindi applicando in  $\mathcal{H}_3$  la trasformazione unitaria  $U$ , nota grazie alla lettura del risultato della misurazione, è possibile portare lo stato  $\sigma_{rid}^{(3)}$  sullo stato iniziale di  $\mathcal{H}_1$ , cioè  $\rho^{(1)}$ .

Da questa considerazione appare evidente come sia possibile realizzare il teletrasporto. Alice vuole inviare a Bob lo stato che un terzo personaggio, diciamo Carol, le ha fornito; essendo in possesso di un sistema fisico in uno stato massimamente entangled con un analogo sistema posseduto da Bob, decide quindi di effettuare una misurazione sullo stato fornito da Carol e sulla sua porzione di entanglement in modo che la POVM sia data da proiettori su stati massimamente entangled; comunica poi il proprio risultato a Bob il quale operando in base ad esso una trasformazione unitaria si ritrova con il suo sistema nello stato fornito da Carol.

Poiché i due sistemi entangled in mano ad Alice e Bob possono essere allontanati a piacere, può sembrare che il teletrasporto trasmetta informazione superluminalmente. In realtà questo è falso perché il completamento del processo di teletrasporto prevede che Bob esegua una trasformazione unitaria dipendente dal risultato della misurazione eseguita da Alice, la cui trasmissione necessita scambio di informazione classica, il che può avvenire al massimo con segnali che viaggiano alla velocità della luce, non violando così il principio di relatività.

Nemmeno il teorema di non clonazione dello stato viene violato: infatti durante tutto il processo non viene estratta alcuna informazione relativa allo stato

fornito da Carol, perché la traccia parziale sullo spazio di Alice di una POVM costituita da proiettori su stati massimamente entangled di  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  dà sullo spazio di Carol una POVM costituita da operatori identità, quindi una POVM incapace di distinguere uno stato da un altro, visto che la probabilità di un qualsiasi risultato della misurazione risulta indipendente dallo stato. È proprio grazie a questo che il teletrasporto consente il trasferimento dello stato con fedeltà assoluta. Una linea di ricerca si occupa di analizzare il bilancio tra informazione acquisita sullo stato in ingresso e qualità dello stato teletrasportato, inquadrando il teletrasporto come una misurazione reversibile e mostrando come la reversibilità di questa misurazione dipenda dalla capacità della stessa di distinguere stati.

Riassumendo, si può dire che la realizzazione del teletrasporto è subordinata alla ricerca di POVM a valori in proiettori su stati massimamente entangled e dei loro schemi di realizzazione. Le misurazioni descritte da questo tipo di POVM sono dette misurazioni di Bell, analogamente una osservabile non degenera che abbia come autovettori una base di Bell viene detta osservabile di Bell.

### 3.4 Misurazioni di Bell: il caso ortogonale e quello covariante

La caratterizzazione delle misurazioni di Bell ortogonali date sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  è resa immediata dall'uso della notazione introdotta per gli stati massimamente entangled. Infatti, se  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  sono entrambi  $N$ -dimensionali allora  $\mathcal{H}$  avrà dimensione  $N^2$ , dunque per determinare una base di Bell dovranno essere individuati  $N^2$  stati massimamente entangled fra loro ortogonali.

Poiché ogni stato massimamente entangled è in corrispondenza biunivoca con la matrice unitaria dei coefficienti del suo sviluppo sulla base prodotto tensore, il problema è ricondotto alla ricerca di un insieme  $\{U_i\}$  di  $N^2$  matrici unitarie tali che gli stati ad esse corrispondenti siano ortogonali. Usando l'equazione (3.3) si ottiene la seguente condizione su queste matrici unitarie:

$$\frac{1}{N} \langle\langle U_i | U_j \rangle\rangle = \text{Tr} [U_i^\dagger U_j] = \delta_{ij}. \quad (3.28)$$

In conclusione, per dare una base di Bell è necessario e sufficiente costruire un insieme di  $N^2$  matrici unitarie ortogonali sotto traccia. Il cambiamento che Bob dovrà apportare allo stato ridotto sul suo spazio sarà esattamente la trasformazione unitaria scelta in questo insieme ed indicata dal risultato della misurazione sulla base di Bell. Comunque è chiaro che questo risultato non è costruttivo, non

indica cioè la direzione da seguire per costruire l'insieme  $\{U_i\}$  e men che meno la classe di osservabili da misurare realmente.

Come mostrato in [22], esiste però un modo semplice ed efficace per generare una POVM a valore in proiettori su stati massimamente entangled: è sufficiente scegliere un gruppo  $\mathbf{G}$  che abbia UIR su  $\mathcal{H}_1$  e costruire la seguente POVM covariante su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ :

$$\begin{aligned}\Pi_{12}(dg) &= \frac{1}{N} U_g^{(1)} \otimes \mathbb{1}_2 |\mathbb{1}\rangle_{12} \langle\mathbb{1}| U_g^{(1)\dagger} \otimes \mathbb{1}_2 \mu(dg) = \\ &= \frac{1}{N} |U_g\rangle_{12} \langle U_g| \mu(dg),\end{aligned}\quad (3.29)$$

dove la misura sul gruppo è la stessa usata per scrivere la formula della traccia. Usando quest'ultima, data l'irriducibilità della rappresentazione di  $\mathbf{G}$ , si dimostra che la (3.29) è a tutti gli effetti una POVM.

Dalla (3.26) si vede come eseguendo la misurazione su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  con risultato  $g$ , lo stato in  $\mathcal{H}_3$  dopo la misurazione sia dato da:

$$\sigma_{rid}^{(3)} = U_g^{(3)\dagger} \rho^{(3)} U_g^{(3)}.\quad (3.30)$$

A questo punto, comunicando  $g$  allo sperimentatore che opera sullo spazio  $\mathcal{H}_3$ , questi può applicare a  $\sigma_{rid}^{(3)}$  la trasformazione unitaria  $U_g^{(3)}$ , ottenendo come stato finale:

$$\sigma_{tlp}^{(3)} = \rho^{(3)}.$$

In questo schema rientrano tutti i tipi di teletrasporto finora realizzati; il formalismo presentato a inizio capitolo ha decisamente semplificato la complessità dei calcoli, rendendo possibile una migliore comprensione del fenomeno.

### 3.4.1 Il protocollo BBCJPW e il gruppo $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$

Nel primo capitolo è stato portato all'attenzione il gruppo discreto  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  avente UIR  $N$ -dimensionale definita da:

$$U(m, n) = \sum_k e^{2\pi i k m / N} |k\rangle \langle k \oplus n|,$$

con legge di composizione:

$$U(m, n)U(m', n') = e^{2\pi i n m' / N} U(m \oplus m', n \oplus n').$$

Tale gruppo genera secondo la (3.29) una POVM di Bell covariante; essendo la cardinalità del gruppo e quindi il numero degli elementi della POVM pari a  $N^2$ ,

la POVM sarà anche ortogonale, e la somma di questi  $N^2$  proiettori dovrà dare l'identità sullo spazio  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Perciò questo esempio è un anello di congiunzione tra le POVM ortogonali e quelle covarianti.

Oltre a ciò, esso è particolarmente importante perché mostra lo schema di teletrasporto BBCJPW sotto un'altra prospettiva e lo generalizza al teletrasporto di stati appartenenti a spazi di Hilbert  $N$ -dimensionali, come evidenziato in [22].

Per illustrare come il teletrasporto BBCJPW corrisponda al caso in cui il gruppo preso in considerazione sia  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , si scelgono le basi di  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  in modo che  $|0\rangle \equiv |+\rangle$  e  $|1\rangle \equiv |-\rangle$ . Si ottiene così:

$$U(0,0) = \mathbb{1}, \quad U(0,1) = \sigma_1, \quad U(1,0) = \sigma_3, \quad U(1,1) = -i\sigma_2,$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}|U_{00}\rangle_{12} &= |\varphi^+\rangle_{12}, & \frac{1}{\sqrt{2}}|U_{01}\rangle_{12} &= |\psi^+\rangle_{12}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|U_{10}\rangle_{12} &= |\varphi^-\rangle_{12}, & \frac{1}{\sqrt{2}}|U_{11}\rangle_{12} &= |\psi^-\rangle_{12}. \end{aligned}$$

Da queste relazioni si capisce come la base di stati massimamente entangled con cui è costruita la POVM di Bell covariante rispetto al gruppo coincida con la base di Bell usata da BBCJPW, e come le trasformazioni unitarie che Bob deve applicare sullo stato ridotto in suo possesso siano proprio i rappresentativi del gruppo: ciò che sembrava inizialmente una alchimia di segni e spin sù e giù, è ora inquadrato in uno schema ben preciso.

Nella sezione 3.5 verrà mostrata l'utilità della POVM generata da  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  nell'individuare osservabili da misurare che siano non degeneri e con autovettori massimamente entangled.

### 3.4.2 Il teletrasporto di Braunstein e Kimble: il gruppo di Weyl-Heisenberg

Il discorso fatto finora è valido solo per spazi di Hilbert a dimensione finita, anche perché nel caso di dimensione infinita uno stato massimamente entangled non è normalizzabile. Come esposto in [22], tutto si può però estendere consentendo alla POVM di essere espressa in termini di stati massimamente entangled non normalizzabili e preparando  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$  in uno stato non massimamente entangled del tipo

$$|\mathcal{D}(\lambda)\rangle_{12}, \quad \text{con } \mathcal{D}(\lambda) = \sum_n c_n(\lambda)|n\rangle\langle n|, \quad \sum_n |c_n(\lambda)|^2 = 1. \quad (3.31)$$

$\mathcal{D}(\lambda)$  è detto operatore di distorsione e  $\lambda \in [0, 1)$  parametrizza in modo continuo la famiglia di stati, la quale nel limite di  $\lambda \rightarrow 1$  tenderà ad uno stato massimamente entangled purché

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \left| \frac{c_{n+1}(\lambda)}{c_n(\lambda)} \right| = 1.$$

Ripercorrendo i passaggi che hanno portato alla (3.26) per l'elemento della POVM relativo a  $|U_x\rangle\langle\langle U_x|dx$ , si trova in questo caso:

$$\begin{aligned} I_{U_x}(\sigma^{(3)}) &= \mathcal{T}_{31}(\lambda)U_x^{(1)\dagger}\rho^{(1)}U_x^{(1)}\mathcal{T}_{13}(\lambda) = \\ &= \mathcal{D}^{(3)}(\lambda)U_x^{(3)\dagger}\rho^{(3)}U_x^{(3)}\mathcal{D}^{(3)\dagger}dx; \end{aligned} \quad (3.32)$$

dove si è utilizzato il fatto che

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{31}(\lambda) &= {}_{12}\langle\langle \mathbb{1} | \mathcal{D}(\lambda) \rangle\rangle_{23} = \sum_i c_i(\lambda) |i\rangle_{31} \langle i| = \mathcal{D}^{(3)}(\lambda) \mathcal{T}_{31}, \\ \mathcal{T}_{13}(\lambda) &= {}_{23}\langle\langle \mathcal{D}(\lambda) | \mathbb{1} \rangle\rangle_{12} = \sum_i c_i^*(\lambda) |i\rangle_{13} \langle i| = \mathcal{T}_{13} \mathcal{D}^{(3)\dagger}(\lambda). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Normalizzando lo stato, si trova infine:

$$\sigma_{rid}^{(3)} = \frac{\mathcal{D}^{(3)}(\lambda)U_x^{(3)\dagger}\rho^{(3)}U_x^{(3)}\mathcal{D}^{(3)\dagger}(\lambda)}{\text{Tr}[U_x^\dagger \rho U_x \mathcal{D}^\dagger(\lambda) \mathcal{D}(\lambda)]}. \quad (3.34)$$

È evidente che nel limite di idealità, cioè  $\lambda \rightarrow 1$ , la (3.34) si riconduce alla (3.26), mentre l'inversione va eseguita sempre con la trasformazione unitaria indicata dal risultato, realizzando così un teletrasporto al limite perfetto.

Un esempio di questo tipo di teletrasporto eseguito su spazi infinito dimensionali è dato dal teletrasporto di variabili continue proposto da Braunstein e Kimble [23] e poi realizzato, nel quale entra in gioco il gruppo di Weyl-Heisenberg degli operatori di spostamento definiti su uno spazio di Hilbert infinito dimensionale:

$$D(z) = e^{za^\dagger - \bar{z}a}, \quad (3.35)$$

dove  $a$  e  $a^\dagger$  sono i generatori dell'algebra dell'oscillatore armonico, ovvero rispettivamente l'operatore di distruzione e di creazione, con relazione di commutazione  $[a, a^\dagger] = 1$ . La legge di composizione di due operatori spostamento risulta essere:

$$D(z)D(w) = e^{i\text{Im}(zw)} D(z+w), \quad (3.36)$$

da cui si può osservare come la (3.35) definisca una rappresentazione unitaria proiettiva del gruppo delle traslazioni sul piano complesso.

La corretta misura sul gruppo è  $\mu(dg) = d^2z/\pi$ , trovata calcolando il valore di aspettazione sul vuoto della risoluzione dell'identità data come orbita sotto l'azione del gruppo del proiettore sullo stato di vuoto. Usando infatti la forma normalmente ordinata dell'operatore spostamento e ponendo il risultato uguale a 1 si trova:

$$\int_G \mu(dg) |\langle 0|U_g|0\rangle|^2 = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi} e^{-|z|^2} = 1, \quad (3.37)$$

come richiesto dalla (1.20).

Quindi la POVM di Bell su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  è:

$$\Pi_{12}(d^2z) = |D(z)\rangle\rangle_{12} {}_{12}\langle\langle D(z)| \frac{d^2z}{\pi} \quad (3.38)$$

La preparazione entangled di  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$  usata nell'esperimento di Braunstein e Kimble è quella ottenuta mediante *downconversion* di vuoto, cioè:

$$|\mathcal{D}(\lambda)\rangle\rangle_{23} = \sqrt{1-\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n\rangle_2 \otimes |n\rangle_3. \quad (3.39)$$

La classe di osservabili da misurare sullo spazio  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  per realizzare la POVM degli stati massimamente entangled non normalizzabili verrà ricavata nella sezione 3.5, la più semplice delle osservabili ad essa appartenenti è proprio quella effettivamente misurata nell'esperimento di Kimble e Braunstein.

### 3.4.3 Esempio di POVM covariante overcompleta: $SU(2)$

Gli esempi precedenti coinvolgevano UIR di gruppi abeliani e facevano riferimento a POVM ortogonali: in un caso in senso proprio e nell'altro in senso improprio, ovvero con ortogonalità alla Dirac, essendo la POVM costituita da proiettori su stati non normalizzabili. Si possono però considerare anche gruppi non abeliani e POVM che non siano ortogonali: il caso del gruppo  $SU(2)$  è un esempio per entrambe le categorie.

Per eseguire il teletrasporto di variabili continue lavorando su spazi  $2j+1$  dimensionali, si consideri la UIR del gruppo  $SU(2)$  su  $\mathcal{H}_1$  i cui elementi siano parametrizzati nel seguente modo:

$$U(g) = \exp(i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}), \quad \text{con } \omega \in [0, 2\pi), \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (3.40)$$

Con questa parametrizzazione la misura invariante sul gruppo correttamente normalizzata è data da

$$\mu(dg) = d\mathbf{n} \sin^2(\omega/2) d\omega / 8\pi. \quad (3.41)$$

La POVM di Bell su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  sarà quindi:

$$\Pi_{12}(d\mathbf{n}, d\omega) = \frac{1}{2j+1} |\exp(i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{n})\rangle\langle\langle \exp(i\omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) | \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{d\mathbf{n} d\omega}{8\pi}, \quad (3.42)$$

che evidentemente è una POVM generata da un set overcompleto di stati, cioè l'orbita sotto  $SU(2)$  di  $\frac{1}{\sqrt{2j+1}} |\mathbb{1}\rangle\langle\mathbb{1}|_{12}$ .

Le difficoltà incontrate nella realizzazione della POVM di Arecchi, lasciano intendere che non sarà tanto facile trovare uno schema di misurazione che realizzi questo tipo di teletrasporto.

### 3.5 Osservabili di Bell

Volendo caratterizzare le osservabili di Bell si sono trovate alcune interessanti identità valide per i gruppi  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  e  $WH$ . Nel secondo caso, inoltre, si riesce a stabilire quale sia l'osservabile migliore da misurare, che oltre tutto corrisponde esattamente a quella misurata da Braunstein e Kimble.

Consideriamo anzitutto il gruppo  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ . Una osservabile di  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  la cui misurazione corrisponda alla proiezione su un elemento della base di Bell costruita col gruppo deve essere diagonalizzata su questa e non degenerare, perché dalla lettura del risultato, che sarà uno degli autovalori, si inferisce quale elemento della POVM sia entrato in gioco e quindi quale trasformazione unitaria Bob debba applicare allo stato ridotto. Riassumendo, ad ogni autovettore dovrà essere associato un autovalore diverso.

Indicata con  $f$  una funzione iniettiva che va da  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  in  $\mathbb{R}$ , usando la (3.19) si può dare l'espressione della generica osservabile di Bell generata con il gruppo  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ :

$$\begin{aligned} O_{12} &= \sum_g f(g) |U_g\rangle\langle\langle U_g| = \\ &= \sum_g f(g) U_g \otimes \mathbb{1} \sum_{g'} U_{g'} \otimes U_{g'}^* U_g^\dagger \otimes \mathbb{1} = \\ &= \sum_{m,n} \sum_{m',n'} f(m,n) e^{\frac{2\pi i}{N}(nm' - mn')} U(m', n') \otimes U^*(m', n') = \\ &= \sum_g \tilde{f}(g) U_g^{(1)} \otimes U_g^{(2)*}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

dove si è definita

$$\tilde{f}(m, n) = \sum_{m', n'} e^{\frac{2\pi i}{N}(nm' - mn')} f(m', n'). \quad (3.44)$$

Nell'ultimo passaggio si è usato:

$$\begin{aligned}
& U(m, n)U(m', n')U^\dagger(m, n) = \\
& = e^{\frac{2\pi i}{N}nm'} U(m \oplus m', n \oplus n')U^\dagger(m, n) = \\
& = e^{\frac{2\pi i}{N}nm'} \sum_k e^{\frac{2\pi i}{N}k(m+m')} |k\rangle \langle k \oplus n \oplus n'| \sum_{k'} e^{-\frac{2\pi i}{N}k'm} |k' \oplus n\rangle \langle k'| = \\
& = e^{\frac{2\pi i}{N}nm'} \sum_k e^{\frac{2\pi i}{N}[(k(m+m')-m(k+n'))]} |k\rangle \langle k \oplus n'| = \\
& = e^{\frac{2\pi i}{N}(nm'-mn')} U(m', n'). \tag{3.45}
\end{aligned}$$

La (3.43) può risultare molto utile, perché scompone un operatore “massimamente entangled”, cioè con autovettori massimamente entangled, in una somma di termini fattorizzati. Si era già dimostrato come questa decomposizione funzionasse per il proiettore sullo stato massimamente entangled standard (ovvero quello corrispondente all'identità), cosa che si è usata nei passaggi, ma nulla poteva far presagire il fatto che dalla somma doppia del primo termine della (3.43) si pervenisse alla sola somma sugli elementi del gruppo presente nell'ultimo termine. È da investigare anche la comparsa della trasformata di Fourier discreta sugli elementi del gruppo, cosa che accadrà in modo analogo anche per il gruppo  $WH$ , anch'esso un gruppo di traslazioni, pur se continue e in un piano.

Passando al gruppo  $WH$ , consideriamo gli spazi di Hilbert a dimensione infinita  $\mathcal{H}_c$ ,  $\mathcal{H}_a$ , in possesso di due distinti sperimentatori che chiameremo rispettivamente Carol e Alice. Lo stato non normalizzabile massimamente entangled “standard” corrisponde a meno di un fattore alla delta di Dirac operatoriale dell'operatore di  $\mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_a$  definito da  $Z_{ca} = c - a^\dagger$ , dove  $c$  e  $a$  sono al solito i distruttori definiti sui due spazi, infatti:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{1}\rangle\rangle_{ca\ ca} \langle\langle \mathbb{1}| & = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\beta}{\pi} D_c(\beta) \otimes D_a(\bar{\beta}) = \\
& = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\beta}{\pi} \exp \left[ (\beta c^\dagger - \bar{\beta} c) + (\bar{\beta} a^\dagger - \beta a) \right] = \\
& = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\beta}{\pi} \exp \left[ \beta Z_{ca}^\dagger - \bar{\beta} Z_{ca} \right] \doteq \pi \hat{\delta}^{(2)}(Z_{ca}). \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Poiché per la definizione di  $D(z)$  si ha che  $D_c(z) c D_c^\dagger(z) = c - z$ , allora segue immediatamente che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} |D(z)\rangle\rangle_{ca\ ca} \langle\langle D(z)| & = D_c(z) \otimes \mathbb{1}_a |\mathbb{1}\rangle\rangle_{ca\ ca} \langle\langle \mathbb{1}| D_c^\dagger(z) \otimes \mathbb{1}_a = \\
& = D_c(z) \otimes \mathbb{1}_a \hat{\delta}^{(2)}(Z_{ca}) D_c^\dagger(z) \otimes \mathbb{1}_a = \\
& = \hat{\delta}^{(2)}(Z_{ca} - z). \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Analogamente a quanto fatto per  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ , si sceglie una funzione  $f$  iniettiva da  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ , che assegni a ciascun autovettore improprio dell'osservabile di Bell un diverso autovalore. Pur essendo l'autovalore complesso, nella rivelazione vera e propria verranno lette la sua parte reale e immaginaria. L'osservabile di Bell diviene:

$$\begin{aligned} O_{ca} &= \int_{\mathbb{C}} d^2z f(z) \frac{1}{\pi} |D(z)\rangle\rangle_{ca} \langle\langle D(z)| = \int_{\mathbb{C}} d^2z f(z) \hat{\delta}^{(2)}(Z_{ca} - z) = \\ &= \hat{f}(Z_{ca}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

La più semplice delle funzioni iniettive è ovviamente la moltiplicazione per una costante, quindi misurando qualcosa di proporzionale all'operatore  $Z_{ca}$  è possibile realizzare il teletrasporto: questo è proprio quello che hanno fatto Braunstein e Kimble. Va sottolineato ancora una volta che la misurazione di  $Z_{ca}$  è intesa come la misurazione congiunta delle sue parti reale ed immaginaria, definite come:

$$\begin{aligned} Re(Z_{ca}) &= \frac{Z_{ca} + Z_{ca}^\dagger}{2} = \frac{c - a^\dagger + c^\dagger - a}{2}, \\ Im(Z_{ca}) &= \frac{Z_{ca} - Z_{ca}^\dagger}{2i} = \frac{c - a^\dagger - c^\dagger + a}{2i}, \\ [Z_{ca}, Z_{ca}^\dagger] &= 0, \quad [Re(Z_{ca}), Im(Z_{ca})] = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Dalle definizioni e dalle relazioni di commutazione di vede come queste siano due osservabili commutanti e quindi ammissibili di misurazione congiunta.

Braunstein e Kimble hanno realizzato questa misurazione usando come sistemi fisici descritti da  $\mathcal{H}_c$  e  $\mathcal{H}_a$  due modi di radiazione indipendenti  $c$  e  $a$ . Sfruttando l'interazione di questi due modi attraverso un *beam splitter* 50/50 e dandone la descrizione alla Heisenberg, si ha:

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + c), \\ c &\longrightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a + c), \end{aligned} \quad (3.50)$$

perciò il *beam splitter* combina linearmente i distruttori dei due modi indipendenti a dare i distruttori di altri due modi indipendenti fra loro. Con due rivelatori *homodyne* si misurano le quadrature  $X_0^{(d)}$  e  $X_{\pi/2}^{(e)}$ , dove in generale la quadratura di fase  $\phi$  di un modo di radiazione  $v$  è definita come

$$X_\phi^{(v)} = \frac{1}{2} [v e^{-i\phi} + v^\dagger e^{i\phi}]. \quad (3.51)$$

Chiaramente  $X_0^{(d)}$  e  $X_{\pi/2}^{(e)}$  corrispondono rispettivamente alle parti reale ed immaginaria dell'operatore  $Z_{ca}$  scalato di un fattore  $\sqrt{2}$ , quindi la loro misurazione

corrisponde esattamente alla realizzazione della POVM di Bell ortogonale costruita con il gruppo  $WH$ . Eventuali efficienze quantiche o la limitatezza del guadagno degli amplificatori parametrici usati per generare lo stato entangled rientrano nell'operatore di distorsione.

Anche per questo gruppo è possibile dare una scomposizione dell'osservabile di Bell in termini fattorizzati; seguendo passo passo la logica che ha portato alla (3.43) si ha:

$$\begin{aligned}
 O &= \int_{\mathbb{C}} d^2z f(z) D(z) \otimes \mathbb{1} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha) \otimes D(\bar{\alpha}) D(z)^\dagger \otimes \mathbb{1} = \\
 &= \int_{\mathbb{C}} d^2z \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\alpha}{\pi} f(z) e^{\alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z} D(\alpha) \otimes D(\bar{\alpha}) = \\
 &= \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha \tilde{f}(\alpha) D(\alpha) \otimes D(\bar{\alpha}) \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

### 3.6 Operazioni quantistiche reversibili e teletrasporto

Considerata una operazione quantistica  $\mathcal{E}$  definita su  $\mathcal{H}$ , supponendo di avere un sottospazio  $M$  di  $\mathcal{H}$  tale che per ogni  $\rho$  a supporto in  $M$  si abbia  $\mathcal{E}(\rho) \neq 0$ , ha senso chiedersi quali siano le condizioni da imporre ad  $\mathcal{E}$  affinché essa sia unitariamente reversibile su  $M$ , ovvero affinché esista una  $U$  su  $\mathcal{H}$  tale che per ogni  $\rho$  a supporto in  $M$  si abbia:

$$\rho = U \frac{\mathcal{E}(\rho)}{\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)]} U^\dagger. \tag{3.53}$$

Come brevemente dimostrato in [24], nel caso di  $\mathcal{E}$  ideale le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. L'operazione ideale  $\mathcal{E}(\rho) = A\rho A^\dagger$  è unitariamente reversibile su  $M$  sottospazio di  $\mathcal{H}$ .
2. L'operatore positivo  $E = A^\dagger A$  è degenere su  $M$ .
3. L'operatore  $A$  può essere posto nella forma  $A = \mu U P_M + A P_{M^\perp}$ , ove  $P_m$  è il proiettore su sottospazio  $M$ , e  $P_{M^\perp}$  è il suo complemento ortogonale.

Rivisitando quanto espresso in [24] alla luce del formalismo “matrice-stato”, la realizzazione del teletrasporto può essere rivista come la ricerca di un modo per invertire un insieme di operazioni locali che derivano dal solito schema di teletrasporto che coinvolge Alice, Bob e Carol. Infatti partendo da una generica

preparazione dei sistemi di Alice e Bob  $\sigma^{(23)} = \sum_i p_i |S_i\rangle_{23} \langle\langle S_i|$ , realizzando una misurazione sui sistemi di Alice e Carol data da uno strumento descritto dagli operatori  $\Omega_j(x)$  (quindi associato alla POVM  $\Pi_{12}(dx) = \sum_j \Omega_j^\dagger(x) \Omega_j(x) dx$  dove  $x$  sta ad indicare i diversi risultati), scelto un set qualunque di vettori ortonormali  $|P_l\rangle_{12}$  e ripetendo i calcoli che hanno portato alla (3.26), si trova che lo stato di Bob ridotto dalla misurazione e dalla lettura del risultato  $x$  è a meno di normalizzazione:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varrho}_x^{(3)} &= \sum_{i,j} p_i Tr_{12} \left[ \mathcal{U}_{13}^\dagger \mathcal{U}_{13} \rho^{(1)} \otimes |S_i\rangle_{23} \langle\langle S_i| \mathcal{U}_{13}^\dagger \mathcal{U}_{13} (\Omega_j^\dagger(x) \Omega_j(x) dx)^{(12)} \otimes \mathbb{1}_3 \right] = \\
&= \sum_i p_i Tr_{12} \left[ \mathcal{U}_{13}^\dagger \rho^{(3)} \otimes |S_i\rangle_{21} \langle\langle S_i| \mathcal{U}_{13} (\Omega_j^\dagger(x) \Omega_j(x) dx)^{(12)} \otimes \mathbb{1}_3 \right] = \\
&= \sum_{ijl} p_i dx {}_{12} \langle\langle P_l | \Omega_j^{(12)}(x) \mathcal{U}_{13}^\dagger | S_i^T \rangle\rangle_{12} \rho^{(3)} {}_{12} \langle\langle S_i^T | \mathcal{U}_{13} \Omega_j^{(12)\dagger}(x) | P_l \rangle\rangle_{12} = \\
&= \sum_{\{m\}} A_{\{m\}}^{(3)}(x) \rho^{(3)} A_{\{m\}}^{(3)\dagger}(x) dx \equiv \mathcal{E}_x(\rho^{(3)}). \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Nella (3.54)  $\{m\}$  è un multiindice che sta per  $i, j, l$ ;  $\mathcal{U}_{13}$  è la trasformazione unitaria tale che:

$$\mathcal{U}_{13} |a\rangle_1 |b\rangle_2 |c\rangle_3 = (\mathcal{T}_{13} |c\rangle_3) |b\rangle_2 (\mathcal{T}_{31} |a\rangle_1) \doteq |c\rangle_1 |b\rangle_2 |a\rangle_3;$$

infine si è definito

$$A_{\{m\}}^{(3)}(x) = \sqrt{p_i} {}_{12} \langle\langle P_l | \Omega_j^{(12)}(x) \mathcal{U}_{13}^\dagger | S_i^T \rangle\rangle_{12}. \tag{3.55}$$

La capacità di teletrasportare un insieme di stati è equivalente alla invertibilità dell'operazione  $\mathcal{E}_x$  su questi stessi stati; detto questo si profila la possibilità di ideare schemi che teletrasportino fedelmente solo alcuni stati, o che funzionino solo per alcuni dei possibili risultati della misurazione.

Nel caso in cui lo stato tra Alice e Bob sia puro, cioè  $|S\rangle_{23} \langle\langle S|$ , e la POVM su Alice e Carol sia della forma  $\Pi_{12}(dx) = |P_x\rangle_{12} \langle\langle P_x| \mu(x) dx$ , si può dimostrare che si ha teletrasporto perfetto per ogni stato fornito da Carol se e solo se tutti i proiettori in gioco proiettano su stati massimamente entangled. Infatti, sotto le ipotesi appena citate, la (3.54) si riduce a:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varrho}^{(3)} &= Tr_{12} \left[ \rho^{(1)} \otimes |S\rangle_{23} \langle\langle S| |P_x\rangle_{12} \langle\langle P_x| \otimes \mathbb{1}_3 \right] \mu(x) dx = \\
&= {}_{12} \langle\langle P_x | S \rangle\rangle_{23} \rho^{(1)} {}_{23} \langle\langle S | P_x \rangle\rangle_{12} \mu(x) dx = \mathcal{E}_x(\rho^{(3)}) \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Considerando che

$$\begin{aligned} {}_{12}\langle\langle P_x||S\rangle\rangle_{23} &= \sum_{ij,lm} {}_1\langle i|{}_2\langle j|(P_x)ij^*s_{lm}|l\rangle_2|m\rangle_3 = \sum_{i,m} \mathcal{T}_{31}|m\rangle_{11}\langle i|(P_x^*S)_{im} = \\ &= \mathcal{T}_{31}S^{(1)T}P_x^{(1)\dagger}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

si trova infine:

$$\mathcal{E}_x(\rho) = S^T P_x^\dagger \rho (S^T P_x^\dagger)^\dagger \mu(x) dx. \quad (3.58)$$

Ricordando quanto detto all'inizio della sezione, l'inversione di  $\mathcal{E}_x$  su tutto lo spazio di Hilbert è possibile solo nel caso in cui l'operatore  $P_x S^* S^T P_x^\dagger$  sia proporzionale all'identità: questo non è altro che la POVM vista da Carol, quindi la costante di proporzionalità sarà la probabilità del risultato  $x$ , indipendente dallo stato di Carol. Per caratterizzare quali  $P$  ed  $S$  siano ammissibili, si sceglie anzitutto di lavorare nelle basi rispetto le quali lo stato  $|S\rangle\rangle_{23}$  è in forma di Schmidt, ovvero  $S$  è diagonale e positivo. Si ricorda che per ogni  $P_x$  esiste una trasformazione unitaria  $V_x$  tale che  $P_x = V_x \sqrt{P_x^\dagger P_x} = V_x \tilde{P}_x$ , quindi si arriva alla condizione:

$$\tilde{P}_x S^2 \tilde{P}_x \mu(x) = p(x) \mathbb{1}. \quad (3.59)$$

Va osservato che  $p(x)$  non è altro che la densità di probabilità associata al risultato  $x$ , e quindi non può che essere strettamente maggiore di zero, altrimenti quel particolare risultato avrebbe probabilità nulla di realizzazione. Come conseguenza di questo si ha che i determinanti di  $\tilde{P}_x$  e  $S$  devono essere diversi da zero, e quindi entrambe le matrici devono essere invertibili. Da ciò, con un po' di algebra, risulta:

$$P_x = V_x \sqrt{\frac{p(x)}{\mu(x)}} S^{-1}. \quad (3.60)$$

Imponendo la condizione di completezza alla POVM si trova:

$$\mathbb{1}_{12} = \int \mu(x) dx |P_x\rangle\rangle_{12} {}_{12}\langle\langle P_x| = \int p(x) dx \mathbb{1}_1 \otimes S_2^{-1} |V_x\rangle\rangle_{12} {}_{12}\langle\langle V_x| \mathbb{1}_1 \otimes S_2^{-1}, \quad (3.61)$$

dove si è fatto uso delle solite relazioni sugli stati di un sistema bipartito e del fatto che  $S$  è diagonale e reale positivo. A questo punto si prende la traccia parziale su  $\mathcal{H}_1$  di entrambi i membri considerando che, ancora per una delle solite formule, il proiettore  $|V_x\rangle\rangle_{12} {}_{12}\langle\langle V_x|$  dà l'identità su  $\mathcal{H}_2$  essendo  $V_x$  unitario, e che  $p(x)$  è normalizzata ad uno, si trova infine:

$$N \mathbb{1}_2 = S^{-2}. \quad (3.62)$$

Quindi  $|S\rangle\rangle_{23}$  è uno stato massimamente entangled, e la POVM è della forma  $\Pi_{12}(dx) = p(x)dx|U_x\rangle\rangle_{12}\langle\langle U_x|$ , dove  $p(x)$  è la distribuzione di probabilità del risultato  $x$  e  $U_x$  è un opportuno operatore unitario.

Poiché l'operatore  $P_x S^* S^T P_x^\dagger$  è la POVM che Carol vede sul suo spazio, richiedere che esso sia completamente degenere equivale a richiedere che la probabilità del risultato  $x$  sia indipendente dallo stato di Carol. Questo tipo di POVM non è in grado di distinguere due stati, perché dato un risultato non si può inferire, nemmeno probabilisticamente, quale fosse lo stato di Carol; non si ha insomma alcuna informazione sullo stato da teletrasportare.

In realtà, per quanto visto, affinché il teletrasporto con preparazione  $AB$  pura e POVM  $AC$  proiettiva funzioni, è necessario che la POVM sia disinformativa su Carol. Infatti in tal caso la POVM avrà valore in proiettori su stati massimamente entangled di Alice e Carol che, tracciati su Alice, danno l'identità su Carol e quindi una POVM parziale completamente disinformativa.

La centralità degli schemi ad entanglement massimale fa capire perché sia importante la loro comprensione e realizzazione.

### 3.7 Robustezza teletrasporto

Tutti gli schemi di teletrasporto finora presentati funzionano idealmente solo nel caso in cui la preparazione dello stato tra Alice e Bob è un entanglement massimale. È quindi lecito domandarsi cosa accada nel caso in cui tale stato non sia perfettamente preparato, come presumibilmente sarà in ogni esperimento reale per effetti di decoerenza o di idealità raggiungibile solo al limite.

Si vuole essere certi che per piccoli scostamenti dalla situazione ideale il teletrasporto continui comunque a funzionare, anche se non perfettamente; in altri termini si vuole verificare la robustezza del protocollo il quale non deve amplificare a dismisura piccoli errori iniziali nella preparazione dell'apparato.

L'analisi seguente si limiterà a valutare la robustezza al variare dello stato tra Alice e Bob, tenendo però a mente la necessità di valutare in modo analogo la robustezza al variare della POVM di Alice e Carol nell'intorno della POVM ideale.

Il formalismo presentato nel capitolo precedente sarà la chiave che consentirà di ridurre drasticamente la difficoltà del problema. Sia dunque  $|S\rangle\rangle_{23}$  un generico stato entangled dei sistemi di Alice e Bob, descritti dallo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$  supposto finito-dimensionale per semplicità. La qualità del teletrasporto

ottenuto con questo stato verrà valutata in termini di peggior fidelity, ovvero si andrà ad individuare lo stato puro che viene peggio teletrasportato calcolando la fidelity tra l'originale e il teletrasportato. Facendo riferimento alla (3.58) e alle considerazioni che seguono, si sa che se il risultato della misurazione è quello connesso all'elemento della POVM descritto dall'operatore unitario  $U$ , allora il teletrasportato di un generico stato puro  $|\psi\rangle$  a meno di normalizzazione sarà

$$|\psi'\rangle = US^T U^\dagger |\psi\rangle,$$

dove evidentemente si è supposto che Bob, non sapendo nulla, continui ad applicare allo stato ridotto la medesima trasformazione unitaria del caso ideale.

La fidelity dello stato originale e del suo teletrasportato sarà:

$$F_{|\psi\rangle} = \frac{|\langle\psi|US^T U^\dagger|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|US^* U^\dagger US^T U^\dagger|\psi\rangle}, \quad (3.63)$$

da cui, sfruttando l'unitarietà di  $U$ :

$$F_{min} = \min_{|\psi\rangle \in \mathcal{H}} F_{|\psi\rangle} = \min_{|\psi\rangle \in \mathcal{H}} \frac{|\langle\psi|S^T|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|S^* S^T|\psi\rangle}, \quad (3.64)$$

sicché la fidelity minima non risulta dipendente da  $U$  e quindi dal risultato della misurazione. Grazie a questa considerazione, nulla vieta di considerare  $S$  come dato sulla base che pone lo stato  $|S\rangle\rangle_{23}$  in forma di Schmidt: in altre parole, d'ora innanzi si potrà considerare  $S$  come diagonale e positivo, ottenendo una notevole semplificazione. Oltre a questo, si osserva come l'espressione della fidelity minima non richieda che la matrice  $S$  sia normalizzata, ovvero abbia  $Tr[S^\dagger S] = 1$ , perché da tale normalizzazione non dipende.

Si può infine scrivere che:

$$F_{min} = \min_{|\psi\rangle \in \mathcal{H}} \frac{|\langle\psi|S|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|S^2|\psi\rangle}, \quad (3.65)$$

da cui è possibile comprendere come la minima fidelity abbia una interpretazione geometrica molto semplice: al vettore normalizzato si applica una mappa lineare positiva definita  $S$  con autovalori prossimi ad uno (caso ideale), la quale provoca una rotazione ed una dilatazione del vettore originario, dove il coseno quadro dell'angolo tra il vettore originario e il ruotato è la fidelity. Detto questo, la peggior fidelity si troverà in concomitanza con il vettore che subisce maggior distorsione angolare.

È chiaro che se  $S$  è scelta nell'intorno dell'identità, ovvero non ci si discosta troppo dal caso ideale, e quindi i suoi autovalori sono nell'intorno di 1, la distorsione angolare massima sarà comunque piccola: si può pertanto affermare che il

teletrasporto è robusto nei confronti di piccole imperfezioni della preparazione dello stato su  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ .

È interessante portare avanti un calcolo esplicito nel caso del teletrasporto di un qubit per vedere in che modo uno sbilanciamento degli autovalori di  $S$  comporti un abbassamento della fidelity. Per quanto detto circa l'indipendenza di  $F_{min}$  dalla normalizzazione di  $S$  e circa la possibilità di considerare  $S$  diagonale e positivo, supporremo per comodità:

$$S = (1 + \epsilon)|0\rangle\langle 0| + (1 - \epsilon)|1\rangle\langle 1|.$$

La minimizzazione può essere eseguita solo sugli  $|\psi\rangle$  della forma

$$|\psi\rangle = \cos x|0\rangle + \sin x|1\rangle,$$

perché, data l'espressione di  $F_{min}$ , ogni eventuale fase risulterebbe del tutto irrilevante.

Sostituendo nella (3.65) si ottiene:

$$\begin{aligned} F_{min} &= \min_x \frac{\left[ \cos^2 x (1 + \epsilon) + \sin^2 x (1 - \epsilon) \right]^2}{\cos^2 x (1 + \epsilon)^2 + \sin^2 x (1 - \epsilon)^2} = \\ &= \min_x \frac{\left[ \epsilon \cos 2x + 1 \right]^2}{2\epsilon \cos 2x + (1 + \epsilon^2)}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

da cui, mediante semplice derivazione, si trova che la fidelity è minima per gli stati per i quali  $\cos 2x = -\epsilon$ , e quindi:

$$F_{min} = 1 - \epsilon^2. \quad (3.67)$$

È interessante porre quest'espressione in funzione soltanto di  $S$ . La matrice  $S$  relativa alla base di Schmidt per lo stato  $|S\rangle\rangle$  ha i medesimi autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$ , di  $\tilde{S} = \sqrt{S^\dagger S}$ , poiché questa è una matrice  $2 \times 2$  si ha:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr[\tilde{S}]}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{Tr[\tilde{S}]^2 - 4 \det(\tilde{S})},$$

da cui dividendo tutto per  $Tr[\tilde{S}]/2$ , ricordando ancora la non dipendenza di  $F_{min}$  dalla normalizzazione di  $S$  e confrontando il risultato con  $1 \pm \epsilon$ , si ottiene:

$$\epsilon = \left[ 1 - 4 \frac{\det(\tilde{S})}{Tr^2[\tilde{S}]} \right]^{\frac{1}{2}},$$

da cui

$$F_{min} = 4 \frac{\det(\tilde{S})}{Tr[\tilde{S}]^2}. \quad (3.68)$$



# Conclusioni

L'applicazione delle proprietà delle rappresentazioni e degli stati coerenti di  $SU(2)$  ha permesso di risolvere il modello ideato per la realizzazione della misurazione della direzione del momento angolare.

Tale modello risulta valido solo nel caso  $j = 1/2$ : per  $j \neq 1/2$  la POVM che ne risulta è difficilmente analizzabile, poichè non è nota l'espressione della funzione  $P_{\mathbf{J}}(\mathbf{n})$  relativa allo sviluppo dell'operatore  $\mathbf{J}$  sulla base degli stati coerenti di  $SU(2)$  generati a partire da autostati di  $J_3$  con  $m \neq -j$ .

Comunque, questo è il primo modello in letteratura che realizza la POVM di Arecchi, anche se solo nel caso di spin  $1/2$ .

Lo stato ridotto a seguito della misurazione si è dimostrato essere indipendente dallo stato iniziale: nel caso  $j = 1/2$  si ha la proiezione sullo stato coerente di spin corrispondente al risultato; nel caso di  $j \neq 1/2$  il modulo del risultato determina a quale set di stati coerenti appartenga lo stato ridotto, mentre la direzione del risultato individua il particolare stato coerente.

Grazie al formalismo che associa una matrice allo stato di un sistema composto, è stato possibile evidenziare in modo originale alcune proprietà degli stati entangled. Inoltre, la medesima notazione ha consentito la caratterizzazione delle osservabili di Bell associate ai gruppi  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$  e  $WH$ , individuando una relazione che scrive queste osservabili "entangled" come somma sul gruppo della trasformata di Fourier di una funzione iniettiva moltiplicata per il prodotto tensore del rappresentativo dell'elemento del gruppo e del suo complesso coniugato. Allo stesso modo si è derivata in modo originale l'osservabile effettivamente misurata nell'esperimento sul teletrasporto di Braunstein e Kimble.

L'introduzione delle operazioni quantistiche, congiuntamente all'applicazione del solito formalismo, ha permesso di dimostrare semplicemente la centralità degli schemi di teletrasporto ad entanglement massimali nella classe dei teletrasporti a preparazione e POVM pura. Oltre a questo, si è dimostrata la robustezza di tali schemi all'eventuale non massimalità dell'entanglement.

Per il proseguio di questo lavoro si intende applicare il formalismo, tanto semplice quanto utile, delle “matrici-stato” allo studio della realizzabilità di schemi di teletrasporto con stati e POVM misti. Allo stesso modo, si intende valutare la realizzabilità di teletrasporti parziali, che funzionino solo su porzioni di spazi di Hilbert. Infine il lavoro riguardante la POVM degli stati coerenti di spin e il teletrasporto associato a  $SU(2)$  meritano ulteriore studio, per quanto riguarda sia gli aspetti matematici, che il problema della realizzabilità fisica.

# Ringraziamenti

Ringrazio sentitamente il Prof. D'Ariano e il Dott. Sacchi per aver condiviso con me il loro amore per la Fisica. Le lunghe ore di discussione e l'aperto scambio di idee mi hanno arricchito non solo come scienziato, ma anche come persona.

Il riconoscimento più grande va ovviamente ai miei genitori, che mi hanno supportato e sopportato in tutti questi anni. Il mio impegno è il minimo che io possa fare per ripagarli dei tanti sacrifici e ringraziarli dell'educazione ricevuta.

Infine, ringrazio tutti gli amici e le persone che mi sono state sempre accanto, in particolare Marika.



# Bibliografia

- [1] M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79 (1984).
- [2] M. A. Naimark, Iza. Akad. Nauk USSR, Ser. Mat. **4** 277 (1940)
- [3] H. F. Jones, *Groups, Representation and Physics*, (Adam Hilger, Bristol, 1990).
- [4] M. Ban, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 1347 (1993).
- [5] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, (Springer-Verlag, 1986).
- [6] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [7] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, Phys. Rev. A **6**, 2211 (1972).
- [8] L. Mandel, Proc. Phys. Soc. **72**, 1037 (1958); *ibid.* **74**, 233 (1959).
- [9] P. L. Kelley, W. H. Kleiner, Phys. Rev. A **30** 844 (1964).
- [10] G. M. D'Ariano, *Quantum estimation theory and optical detection*, in *Quantum Optics and the Spectroscopy of Solids*, T. Hakioglu e A. S. Shumovsky Eds. (Kluwer, Dordrecht, 1997)
- [11] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton, NJ, 1955).
- [12] G. M. D'Ariano, M. F. Sacchi, Phys. Lett. A **231**, 325 (1997).
- [13] E. Arthurs, J. L. Kelly, Bell. Syst. Tech. J., **44**, 725-729 (1965).
- [14] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, (Academic Press, 1980)

- 
- [15] D. M. Appleby, quant-ph/9911021 (1999).
  - [16] M. B. Plenio, V. Vedral, quant-ph/9804075 (1998).
  - [17] M. B. Plenio, V. Vedral, quant-ph/9707035 (1997).
  - [18] S. Parker, S. Bose, M. B. Plenio, quant-ph/9906098 (2000).
  - [19] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, P. L. Knight, quant-ph/9702027 (2000).
  - [20] J. Preskill, *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation*, (CalTech, 1998).
  - [21] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
  - [22] S. L. Braunstein, G. M. D'Ariano, G. J. Milburn, M. F. Sacchi, Phys. Rev. Lett. **84**, 3486 (2000).
  - [23] S. L. Braunstein, H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).
  - [24] M. A. Nielsen, C. Caves, Phys. Rev. A **55**, 2547 (1997).