

Indice

1	Introduzione	3
2	Concetti preliminari	6
2.1	Nozione di stato coerente	6
2.2	La rappresentazione P	8
2.3	Distribuzioni di Wigner	9
2.4	La Master equation	12
2.5	Derivazione della Master equation	13
2.6	Evoluzione dei valori medi	19
2.7	Master eq. per il numero di fotoni	20
3	L'equazione di Fokker-Planck	23
3.1	Introduzione	23
3.2	Metodo generale per dedurre la Fokker-Planck a partire dalla Master equation	24
3.3	Esempi di applicazione del metodo	31

3.4	Fokker-Planck generalizzata per il laser	35
3.5	Fokker-Planck nelle rappresentazioni P e 'numero'	43
4	Simulazione dell'equazione di Fokker-Planck	48
4.1	Introduzione	48
4.2	Nozioni fondamentali sul metodo	49
4.3	Tecniche di simulazione	53
4.3.1	L'algoritmo di Metropolis	53
4.3.2	La procedura di simulazione	55
4.4	Il modello Van Der Pol di laser alla soglia	60
5	Applicazione ad un modello di amplificatore ottico	66
5.1	Introduzione	66
5.2	L'equazione di Fokker-Planck per un laser monomodale	66
5.3	Amplificatore ad onda viaggiante	69
6	Conclusioni	74

Capitolo 1

Introduzione

I metodi di simulazione Monte-Carlo sono stati introdotti recentemente in ottica quantistica per trattare sistemi dissipativi non lineari. I metodi di simulazione si distinguono in due categorie:

i) simulazione della Master equation e ii) simulazione dell'equazione di Fokker-Planck. I due diversi approcci pur essendo equivalenti in linea di principio, risultano complementari dal punto di vista delle applicazioni concrete. L'approccio della Master equation [1] è particolarmente adatto a trattare piccoli numeri di fotoni, ma si rivela inapplicabile quando il numero di fotoni coinvolti sia elevato, come nei laser o negli amplificatori ottici. In questi casi l'approccio di Fokker-Planck risulta lo strumento più efficace per valutazioni numeriche in qualsiasi range di intensità della radiazione. A seconda della forma analitica delle matrici di drift e di diffusione, l'equazione di Fokker-Planck si adatta a rappresentare una vasta classe di fenomeni in

ottica quantistica, consentendo in particolare la trattazione quantistica del rumore in presenza di saturazione e, più in generale, lo studio di effetti non lineari [2].

In questo lavoro di tesi viene presentato un nuovo metodo numerico per risolvere le equazioni di Fokker-Planck in ottica quantistica, basato su una simulazione Monte-Carlo dei processi di diffusione probabilistica. Tale metodo è particolarmente efficiente quando è necessaria un'analisi multimodale e risulta perciò di grande utilità nello studio di modelli reali di sistemi ottici non lineari. In questa tesi, oltre ad alcuni controlli del metodo sulla base di modelli analitici, riporteremo i risultati delle simulazioni di un concreto amplificatore ottico. Inoltre deriveremo le equazioni di Fokker-Planck a partire dalle master equation, e presenteremo a tale scopo un metodo generale di derivazione, corredato di interessanti esempi di applicazione.

Nel capitolo (1) vengono presentati, a livello preliminare, i concetti fondamentali necessari a introdurre le principali distribuzioni di probabilità usate in ottica quantistica, ovvero la rappresentazione P di Glauber-Sudarshan [3] e le più generiche funzioni di Wigner. Riportiamo inoltre la derivazione della Master equation in forma del tutto generale, per adattarla poi ad un semplice modello d'oscillatore smorzato per il quale l'equazione è analizzata nella rappresentazione 'numero'.

Nel capitolo (2) viene affrontato il problema della trasformazione della

master equation in un'equazione di Fokker-Planck per una generica rappresentazione di Wigner $W_s(\alpha, \alpha^*)$. Si danno inoltre alcuni esempi di applicazione a varie forme di master equation, ed in particolare al laser [4]. Si concentra in special modo l'attenzione sull'equazione Fokker-Planck nella rappresentazione di Glauber per mezzo della funzione di quasi-probabilità P .

Nel capitolo (3) vengono presentate le nozioni fondamentali del nuovo metodo Monte-Carlo di simulazione dell'equazione di Fokker-Planck, con particolare riguardo alle principali caratteristiche sulle quali è stata basata la procedura di simulazione. Viene considerato, come esempio di applicazione del metodo, il caso bidimensionale nella rappresentazione P relativa al modello di Van Der Pol del laser in prossimità della soglia. Si riportano anche le simulazioni numeriche della funzione di correlazione del campo e della forma di riga.

Come ulteriore applicazione del metodo Monte-Carlo, nel capitolo (4) si considera un'equazione unidimensionale di Fokker-Planck che descrive un semplice modello di amplificatore ottico (*Travelling Wave Optical Amplifier*) (TWOA) così come caratterizzato in Ref. [5]. Vengono presentate le simulazioni numeriche del guadagno e della figura di rumore dell'amplificatore.

Chiude il lavoro il capitolo (6) dedicato alle conclusioni.

Capitolo 2

Concetti preliminari

2.1 Nozione di stato coerente

Gli stati coerenti in ottica quantistica furono introdotti da Glauber [3] per discutere le proprietà di coerenza del campo elettromagnetico.

Senza soffermarsi sui dettagli di tale teoria quantistica, definiamo direttamente lo stato coerente $|\alpha\rangle$ come autostato dell'operatore a di annichilazione:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.1)$$

E' possibile costruire gli stati $|\alpha\rangle$ a partire dallo stato di vuoto mediante l'operatore unitario di spostamento $\hat{D}(\alpha)$ così definito:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \quad , \quad (2.2)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)a\hat{D}(\alpha) = a + \alpha \quad (2.3)$$

e risulta $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$.

Tra le proprietà più significative ricordiamo che gli stati coerenti non costituiscono una base ortogonale dal momento che $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$, mentre formano un set overcompleto come risulta dalla relazione

$$\hat{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (2.4)$$

Considerando un campo coerente unimodale con Hamiltoniana d'oscillatore armonico $H = \hbar\omega a^\dagger a$, si trova l'evoluzione temporale dello stato coerente

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega a^\dagger a t} |\alpha_0\rangle = |\alpha_0 e^{-i\omega t}\rangle, \quad (2.5)$$

ovvero, per tutti i tempi è preservata la coerenza e l'evoluzione libera avviene come per il moto classico d'oscillatore armonico nello spazio delle fasi.

La funzione $\alpha(t)$ si muove infatti nel piano complesso sui cerchi a $|\alpha|$ costante in accordo con la traiettoria ellittica classica $p^2 + \omega^2 q^2 = 2\mathcal{H}$.

Infine gli stati $|\alpha\rangle$ possono essere considerati come pacchetti d'onda ad indeterminazione minima che non si sparpagliano nel corso dell'evoluzione temporale (posto che l'Hamiltoniana di sistema preservi la coerenza).

Dalle relazioni

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a^\dagger + a) \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a) \quad (2.6)$$

si ottiene infatti che

$$\langle\alpha|(\Delta q)^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2\omega}, \quad \langle\alpha|(\Delta p)^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (2.7)$$

da cui $(\Delta q)_\alpha(\Delta p)_\alpha = \frac{\hbar}{2}$, cioè $|\alpha\rangle$ è uno stato a indeterminazione minima e perciò il più stretto analogo quantistico degli stati d'oscillatore armonico classico.

2.2 La rappresentazione P

Basandosi sulla proprietà degli stati coerenti di costituire un set *overcomplete* di stati non ortogonali, ovverosia

$$\hat{1} = \frac{1}{\pi} \int_C d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.8)$$

risulta conveniente espandere un generico operatore come sovrapposizione di proiettori coerenti.

In particolare ogni matrice densità si può sempre scrivere nella forma di miscela

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (2.9)$$

L'equazione (2.9) descrive la cosiddetta rappresentazione P o di Glauber-Sudarshan, nella quale $P(\alpha, \alpha^*)$ gioca un ruolo analogo alla densità di probabilità classica per la distribuzione di valori di α nel piano complesso, soddisfacendo peraltro l'usuale condizione di normalizzazione

$$\text{Tr}\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) = \hat{1}. \quad (2.10)$$

Si noti che per i valori di aspettazione di operatori normalmente ordinati - del tipo $a^{\dagger m} a^n$ - si ottiene

$$\begin{aligned} \langle a^{\dagger n} a^m \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} a^{\dagger n} a^m) = \text{Tr}\left(\int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| a^{\dagger n} a^m\right) \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*n} \alpha^m, \end{aligned} \quad (2.11)$$

cioè le medie 'normalmente' ordinate vengono calcolate allo stesso modo che in statistica classica. In generale, però, $P(\alpha, \alpha^*)$ non è definita positiva, e si suole per questo indicarla con il nome di *quasiprobabilità*. Si deve anche notare che $P(\alpha, \alpha^*)$ è spesso altamente singolare, ed è più precisamente una distribuzione. Ad esempio, per uno stato numero $\rho = |n\rangle\langle n|$, si perviene alla seguente espressione

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{n!}{2\pi r (2n)!} e^{r^2} (-\partial/\partial r)^{2n} \delta(r) \quad , \quad \alpha = r e^{i\theta} \quad , \quad (2.12)$$

mentre per uno stato coerente $|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$ dalla (2.9) segue che $P(\alpha, \alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$. La non positività della $P(\alpha, \alpha^*)$ è associata alla natura quantistica dello stato corrispondente $\hat{\rho}$, il quale non può essere in alcun modo descritto da probabilità classiche: per questo gli stati con $P(\alpha, \alpha^*)$ negativa sono detti nonclassici.

2.3 Distribuzioni di Wigner

Considereremo ora la distribuzione di Wigner, che può essere considerata la 'generatrice' di tutte le più importanti funzioni di probabilità in uso in

ottica quantistica, risultando particolarmente utile nel valutare i valori medi di operatori ordinati in maniera diversa.

E' anzitutto opportuno introdurre la funzione caratteristica:

$$F(\lambda, \lambda^*; s) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \exp(\lambda a^\dagger - \lambda^* a + \frac{s}{2} |\lambda|^2) \right\}, \quad (2.13)$$

dove $s = \pm 1$ a seconda che l'ordinamento sia normale o antinormale.

Risulta infatti ¹

$$F(\lambda, \lambda^*; 1) = \langle : e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a} : \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} \right\} \quad (2.14)$$

$$F(\lambda, \lambda^*; -1) = \langle :: e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a} :: \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^\dagger} \right\}, \quad (2.15)$$

dove $:$ e $::$ indicano rispettivamente l'ordine normale e antinormale.

Nel caso $s=0$ otterremo la funzione generatrice dei momenti simmetricamente ordinati,

$$F_{sim}(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \exp(\lambda a^\dagger - \lambda^* a) \right\}. \quad (2.16)$$

In generale è possibile ricavare i valori medi di operatori s-ordinati mediante la formula

$$\langle \{ a^{\dagger n} a^m \}_s \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\rho} \{ a^{\dagger n} a^m \}_s \right) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{\partial^m}{\partial (-\lambda)^m} \Big|_{\lambda=\lambda^*=0} F(\lambda, \lambda^*; s). \quad (2.17)$$

La definizione della distribuzione di Wigner per il calcolo di medie s-ordinate discende in modo naturale dalla (2.17) definendo $W(\alpha, \alpha^*; s)$ come

¹Si è fatto uso qui della relazione di Campbell-Hausdorff $e^{(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$

la trasformata di Fourier di $F(\lambda, \lambda^*; s)$:

$$W(\alpha, \alpha^*; s) = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} F(\lambda, \lambda^*; s) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} , \quad (2.18)$$

Con la relazione inversa

$$F(\lambda, \lambda^*; s) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W(\alpha, \alpha^*; s) e^{-\alpha\lambda^* + \alpha^*\lambda} , \quad (2.19)$$

otteniamo dalla (2.17),

$$\begin{aligned} \langle \{a^{\dagger n} a^m\}_s \rangle &= \frac{\partial^{m+n}}{\partial \lambda^n \partial (-\lambda^*)^m} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W(\alpha, \alpha^*; s) e^{-\alpha\lambda^* + \alpha^*\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda^*=0} = \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W(\alpha, \alpha^*; s) \alpha^{*n} \alpha^m . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Per $s = 1$ si ritrova l'espressione del valor medio nella rappresentazione P dato dalla (2.11) e si ha quindi $W(\alpha, \alpha^*; 1) \equiv \pi P(\alpha, \alpha^*)$. Per $s = -1$, si ottiene la cosiddetta funzione $Q(\alpha, \alpha^*)$. Precisamente si ha

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} F(\lambda, \lambda^*; -1) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} , \quad (2.21)$$

ovvero la funzione Q è la distribuzione di probabilità per le medie di operatori *antinormalmente ordinati*

$$\langle \{a^n a^{\dagger m}\} \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} Q(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*m} \alpha^n . \quad (2.22)$$

Si verifica facilmente che la funzione Q assume la semplice forma $Q(\alpha, \alpha^*) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$, con normalizzazione $\int \frac{d^2\alpha}{\pi} Q(\alpha, \alpha^*) = \hat{1}$.

La funzione Q è sempre positiva in quanto valore di aspettazione di una matrice definita positiva e corrisponde quindi ad una vera probabilità (di osservare il sistema nello stato coerente $|\alpha\rangle$).

Con l'ausilio della rappresentazione P per la matrice densità si può osservare che

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \alpha^*) \equiv \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle &= \int d^2\beta P(\beta, \beta^*) |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \\ &= \int d^2\beta P(\beta, \beta^*) e^{-|\alpha - \beta|^2}, \end{aligned}$$

ovvero Q è la convoluzione di P con una bigaussiana.

Per uno stato coerente $|\alpha_0\rangle$ la funzione Q è una bigaussiana centrata in α_0 , ovvero

$$Q(\alpha) = \langle \alpha | \alpha_0 \rangle \langle \alpha_0 | \alpha \rangle = e^{|\alpha - \alpha_0|^2}. \quad (2.23)$$

2.4 La Master equation

Le master-equation furono inizialmente introdotte da Pauli in meccanica statistica quantistica per descrivere i fenomeni di rilassamento di sistemi macroscopici all'equilibrio termico.

La classe generale di problemi a cui siamo interessati è quella in cui si studia la dinamica di un piccolo sistema aperto S che decade irreversibilmente sotto l'influenza di un grande sistema R , al quale è accoppiato. Quest'ultimo

tipicamente rimane in equilibrio termico e perciò ci riferiremo ad esso con il termine di *bagno* o *riserva*. Come si vedrà in seguito con la master equation è possibile descrivere la dinamica del sistema isolandolo dal bagno, ovvero trascurando le correlazioni bagno-sistema di scarsa rilevanza sperimentale.

Deriveremo la master equation in forma del tutto generale, per adattarla in seguito ad un semplice modello di oscillatore armonico smorzato.

2.5 Derivazione della Master equation

Consideriamo l'Hamiltoniana generale espressa nella forma

$$H = H_s + H_r + V \quad (2.24)$$

dove H_s, H_r, V sono rispettivamente le Hamiltoniane di sistema, di riserva e di interazione. Sia $\rho_{sr}(t)$ l'operatore densità per lo spazio di Hilbert $S \oplus R$ del sistema con il bagno e definiamo l'operatore densità ridotta $\rho_s(t)$ come segue

$$\rho_s(t) = \text{Tr}_r [\rho_{sr}(t)] , \quad (2.25)$$

dove la traccia è eseguita sugli stati della riserva.

Nello schema di Schrödinger l'equazione del moto è

$$\dot{\rho}_{sr} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{sr}] \quad (2.26)$$

con H data dalla (2.24). Poichè siamo interessati all'evoluzione del solo sistema, ricordando che il valore medio di un operatore di sistema O è dato dalla relazione

$$\text{Tr}_{sr} [\hat{O}\rho_{sr}(t)] = \text{Tr}_s [\hat{O}\text{Tr}_r \rho_{sr}(t)] = \text{Tr}_s [\hat{O}\rho_s(t)] , \quad (2.27)$$

il nostro obiettivo è ricondotto alla ricerca di un'equazione per l'operatore densità ridotto ρ_s del sistema: una tale equazione di evoluzione è detta *master equation*.

Trasformiamo innanzitutto la (2.26) nello schema di interazione, separando i moti veloci - associati a $H_s + H_r$ - da quello lento generato da V .

L'operatore densità e l'equazione di moto diventano

$$P_{sr}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_s+H_r)t} \rho_{sr}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_s+H_r)t} , \quad (2.28)$$

$$\dot{P}_{sr} = -\frac{i}{\hbar} [V_i(t), P_{sr}] \quad (2.29)$$

dove $V_i(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(H_s+H_r)t} V(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(H_s+H_r)t}$.

Integrando formalmente la (2.29) otteniamo

$$P_{sr}(t) = P_{sr}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [V_i(t'), P_{sr}(t')] \quad (2.30)$$

e sostituendo la (2.30) nella (2.29) si ha:

$$\dot{P}_{sr} = -\frac{i}{\hbar} [V_i(t), P_{sr}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [V_i(t), [V_i(t'), P_{sr}(t')]] . \quad (2.31)$$

Assumiamo che i sistemi S e R siano posti in contatto a $t = 0$, senza che si

presenti alcuna correlazione fra loro, cioè all'istante iniziale sia

$$P_{sr}(0) = \rho_{sr}(0) = \rho_s(0) \rho_r(0) . \quad (2.32)$$

Denotando con $\rho(t) = \text{Tr}_r[P_{sr}(t)]$ l'operatore densità ridotto nello schema d'interazione e tracciando la (2.31) sulla riserva, si ottiene:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_r \{ [V_i(t), [V_i(t'), P_{sr}(t')]] \} , \quad (2.33)$$

dove abbiamo eliminato il termine con $\text{Tr}_r[V_i(t), \rho_{sr}(0)]$ supponendo che gli operatori di bagno abbiano media nulla nello stato $\rho_r(0)$, ovvero sia

$$\text{Tr}_r[V_i(t)\rho_r(0)] = 0 . \quad (2.34)$$

Se la riserva è grande e l'accoppiamento V è debole, la dinamica del bagno non viene influenzata da quella del piccolo sistema S , e ad ogni istante vale l'approssimazione

$$P_{sr}(t) = \rho(t)\rho_r(0) + O(V) .$$

Limitando l'approccio perturbativo al secondo ordine, dalla (2.33) otteniamo

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_r \{ [V_i(t), [V_i(t'), \rho(t')\rho_r(0)]] \} . \quad (2.35)$$

Se i cambiamenti nella dinamica del bagno causati dall'interazione col sistema sono poco significativi, l'evoluzione futura di S non viene influenzata apprezzabilmente dal bagno e $\rho(t)$ non dipende dalla sua *storia precedente*:

vale in tal caso l'*approssimazione di Markoff* per la quale si sostituisce nella (2.35) $\rho(t')$ con $\rho(t)$,

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_r \{ [V_i(t), [V_i(t'), \rho(t)\rho_r(0)]] \}. \quad (2.36)$$

Vedremo che tale approssimazione equivale ad affermare che il tempo di correlazione della riserva è infinitamente breve rispetto alla scala temporale della dinamica del sistema S .

Riscriviamo l'interazione in maniera più specifica come

$$V_i(t) = \hbar \sum_i s_i F_i(t) \quad (2.37)$$

dove s_i e F_i sono operatori di sistema e di riserva rispettivamente, ed ogni dipendenza temporale è stata inclusa in $F_i(t)$. La *master equation* nell'approssimazione di Markoff risulta ora:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \text{Tr}_r \{ [s_i F_i(t), [s_j F_j(t'), \rho(t)\rho_r(0)]] \} = \\ &= - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \{ [s_i s_j \rho(t) - s_j \rho(t) s_i] \langle F_i(t) F_j(t') \rangle_r \\ &\quad + [\rho(t) s_j s_i - s_i \rho(t) s_j] \langle F_j(t') F_i(t) \rangle_r \}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

dove si è usata la proprietà $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$ e la definizione

$$\langle F_i(t) F_j(t') \rangle_r \equiv \text{Tr}_r \{ \rho_r(0) F_i(t) F_j(t') \}. \quad (2.39)$$

L'assunzione per cui $\rho(t)$ sostituisce $\rho(t')$ rimane giustificata se le funzioni di correlazione del bagno (2.39) decadono molto rapidamente rispetto alla scala dei tempi su cui varia $\rho(t')$.

Idealmente avremo che $\langle F_i(t)F_j(t') \rangle_r \propto \delta(t - t')$.

Consideriamo ora un semplice modello costituito da un oscillatore armonico con frequenza Ω accoppiato a una riserva di oscillatori armonici con frequenza ω_j , con spettro a banda larga, e perciò con brevissimi tempi di correlazione. Le Hamiltoniane sono

$$H_s = \hbar\Omega a^\dagger a \quad (2.40)$$

$$H_r = \sum_j \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j \quad (2.41)$$

$$V = \hbar \sum_j (g_j^* a b_j^\dagger + g_j a^\dagger b_j) , \quad (2.42)$$

con g_j costante di accoppiamento. La riserva è all'equilibrio termico alla temperatura T , ovvero

$$\rho_r = \frac{e^{-\beta H_r}}{\text{Tr}_r(e^{-\beta H_r})} . \quad (2.43)$$

Essendo ρ_r diagonale nella rappresentazione numero, è garantito che gli operatori di bagno abbiano media nulla.

Passando allo schema di interazione per la $V_i(t) = \hbar \sum_i s_i F_i(t)$, si ha

$$V_i(t) = \hbar a F^\dagger(t) + \hbar a^\dagger F(t) , \quad (2.44)$$

dove $F_1(t) = F(t) = \sum_j g_j \hat{b}_j e^{i(\Omega - \omega_j)t}$, $F_2(t) = F^\dagger(t)$. Allora dall'equazione

generale (2.38) otteniamo ($s_1 = a, s_2 = a^\dagger$)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & - \int_0^t dt' \{ [aa^\dagger \rho(t') - a^\dagger \rho(t') a] \langle F^\dagger(t) F(t') \rangle_r + h.c. \\ & + [a^\dagger a \rho(t') - a \rho(t') a^\dagger] \langle F(t) F^\dagger(t') \rangle_r + h.c. \} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Le funzioni di correlazione del tipo $\langle \hat{F} \hat{F} \rangle$ e $\langle \hat{F}^\dagger \hat{F}^\dagger \rangle$ sono identicamente nulle per la forma dell'operatore ρ_r , mentre per le altre si ha

$$\langle F(t) F^\dagger(t') \rangle_r = \sum_i |g_i|^2 \langle b_i b_i^\dagger \rangle_r e^{i(\Omega - \omega_i)(t - t')} . \quad (2.46)$$

Introducendo ora la densità di modi del bagno $\mathcal{D}(\omega)$ e con il cambio di variabile $\tau = t - t'$, la (2.46) si riscrive come segue

$$\begin{aligned} \langle F(t) F^\dagger(t - \tau) \rangle_r &= \int_0^\infty d\omega \mathcal{D}(\omega) |g(\omega)|^2 \langle b(\omega) b(\omega)^\dagger \rangle_r e^{i(\Omega - \omega)\tau} \\ &= \int_0^\infty d\omega \mathcal{D}(\omega) |g(\omega)|^2 [\bar{n}(\omega) + 1] e^{i(\Omega - \omega)\tau} \end{aligned} \quad (2.47)$$

con \bar{n} numero medio di fotoni del bagno alla frequenza ω . L'approssimazione di Markoff richiede che $\langle F F^\dagger \rangle$ sia proporzionale a $\delta(\tau)$: questo è garantito dalla riserva a banda larga, con tempo di correlazione $\tau_c \simeq \omega_i^{-1}$ molto breve in confronto alla scala dei tempi per cui $\rho(t)$ varia significativamente.

È possibile quindi effettuare l'integrazione finale utilizzando il limite con regolarizzazione causale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{i(\Omega - \omega_i)\tau} = \pi \delta(\Omega - \omega) + \mathcal{P} \left(\frac{i}{\Omega - \omega} \right) , \quad (2.48)$$

dove \mathcal{P} indica la parte principale (il cui contributo verrà in seguito trascurato, in quanto comporta semplicemente uno shift della frequenza Ω).

Alla luce delle precedenti osservazioni, sostituendo $\rho(t - \tau)$ con $\rho(t)$ nell'equazione (2.45), si perviene alla seguente *master equation*:

$$\dot{\rho}(t) = \{-\gamma\bar{n} [\rho a a^\dagger - a^\dagger \rho a] - \gamma(\bar{n} + 1)[a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger]\} + h.c. \quad (2.49)$$

dove si è posto $\gamma = \pi \mathcal{D}(\Omega) |g(\Omega)|^2$ e $\bar{n} = \bar{n}(\Omega)$.

2.6 Evoluzione dei valori medi

Per mezzo della master equation per la $\rho(t)$ è ora possibile calcolare la dinamica dei valori d'aspettazione di operatori di sistema quali \hat{a} e \hat{n} , verificando così che la master equation descrive un processo di damping irreversibile per il sistema.

Per l'ampiezza del campo $\langle a \rangle = \text{Tr}(a\rho)$, dalla (2.49) si ricava l'equazione

$$\frac{d\langle a \rangle}{dt} = -\gamma \langle a \rangle, \quad (2.50)$$

che ha come soluzione

$$\langle a(t) \rangle = \langle a(0) \rangle e^{-\gamma t}. \quad (2.51)$$

Per il numero medio di fotoni $\langle n \rangle$ (ovvero l'intensità) si trova

$$\frac{d\langle a^\dagger a \rangle}{dt} = -2\gamma \langle a^\dagger a \rangle + 2\gamma\bar{n}, \quad (2.52)$$

con soluzione

$$\langle n(t) \rangle = \langle n(0) \rangle e^{-2\gamma t} + \bar{n}(1 - e^{-2\gamma t}). \quad (2.53)$$

Il secondo termine nella (2.53) produce come soluzione stazionaria $\langle n \rangle = \bar{n}$, ovvero si ha l'equilibrio termico con la riserva.

Riscrivendo la (2.52) nella forma

$$\frac{d\langle a^\dagger a \rangle}{dt} = -2\gamma\langle a^\dagger a \rangle(\bar{n} + 1) + 2\gamma\bar{n}(\langle a^\dagger a \rangle + 1), \quad (2.54)$$

è possibile interpretare il *rate* per il numero medio di fotoni come risultato di un bilancio fra emissione dal sistema verso il bagno e viceversa. I termini $+1$ rappresentano l'emissione spontanea, priva di equivalente classico (per una riserva a temperatura zero $\bar{n} = 0$ e si ha solo decadimento spontaneo del sistema).

2.7 Master eq. per il numero di fotoni

Risulta utile derivare dalla Master equation un'equazione di moto per gli elementi diagonali della matrice densità $\rho_{nn} \equiv p_n$ nella rappresentazione numero.

Utilizzando le proprietà degli operatori di creazione e di annichilazione

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

è immediato ricavare dalla (2.49) la seguente equazione:

$$\dot{p}_n = -2\gamma(\bar{n} + 1)[np_n - (n+1)p_{n+1}] - 2\gamma\bar{n}[(n+1)p_n - np_{n-1}]. \quad (2.55)$$

Nella figura che segue sono illustrati i flussi della probabilità numero in relazione a transizioni up e down dallo stato $|n\rangle$ d'oscillatore armonico.

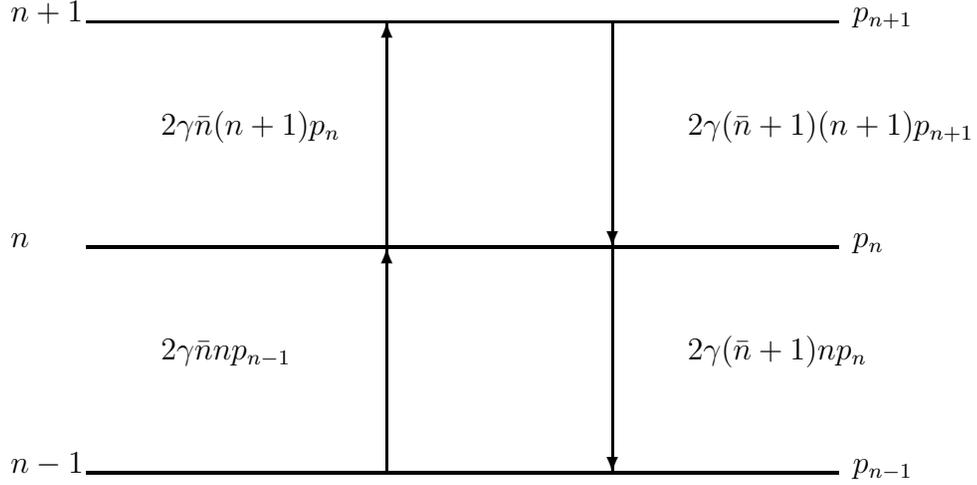


Figura 2.1: Flussi per la probabilità numero.

Lo stato stazionario è dato dal bilancio esatto fra i processi di assorbimento e di emissione dal generico livello n , ovvero

$$\gamma(\bar{n} + 1) n p_n = \gamma \bar{n} n p_{n-1} . \quad (2.56)$$

Iterando l'eq. (2.56) e normalizzando si ricava

$$\begin{aligned} p_n &= [\bar{n}/(\bar{n} + 1)] p_{n-1} = [\bar{n}/(\bar{n} + 1)]^n p_0 \\ &= e^{-n\hbar\Omega/k_B T} [1 - e^{-\hbar\Omega/k_B T}] , \end{aligned} \quad (2.57)$$

ovvero la soluzione stazionaria della (2.55) è la distribuzione di Bose-Einstein per l'equilibrio termico.

Capitolo 3

L'equazione di Fokker-Planck

3.1 Introduzione

La *Master Equation* (M.E.) per la densità ridotta $\rho(t)$ presentata nel capitolo (2) permette di calcolare l'evoluzione dei valori d'aspettazione per le osservabili del sistema. Essa però non si presta ad un'immediata interpretazione fisica dell'evoluzione del sistema stesso, ed è perciò conveniente trasformare la master equation in una forma classica e non operatoriale.

Delineiamo ora un metodo che consente di trasformare le M.E. in equazioni di Fokker-Planck ¹ in una generica rappresentazione $W_s(\alpha, \alpha^*)$. Daremo in seguito alcuni esempi d'applicazione a varie M.E., e, in particolare un'applicazione al laser. Particolare attenzione verrà dedicata alla rappresentazione di Glauber-Sudarshan mediante la funzione $P(\alpha, \alpha^*, t)$.

¹Un'equazione di Fokker-Planck fu per la prima volta usata da Fokker e Planck per descrivere la distribuzione di probabilità della velocità per particelle in moto Browniano.

3.2 Metodo generale per dedurre la Fokker-Planck a partire dalla Master equation

Illustreremo ora come si deriva un'equazione di Fokker-Planck per la generica rappresentazione $W_s(\alpha, \alpha^*; \rho)$ da una generica Master equation (M.E.)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{L}(\rho) . \quad (3.1)$$

A tale proposito è necessario ricordare quali legami intercorrono tra la quasi-probabilità $W_s(\alpha, \alpha^*; \rho)$ e la relativa funzione caratteristica

$$F_s(\lambda, \lambda^*; \rho) \equiv \text{Tr}\{\rho D_s(\lambda, \lambda^*)\} , \quad (3.2)$$

dove $D_s(\lambda, \lambda^*) = \exp\{\lambda a^\dagger - \lambda^* a + \frac{1}{2}s|\lambda|^2\}$.

Valgono le seguenti relazioni:

$$F_s(\lambda, \lambda^*; \rho) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) e^{\alpha^*\lambda - \alpha\lambda^*} \quad (3.3)$$

$$W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} F_s(\lambda, \lambda^*; \rho) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} . \quad (3.4)$$

Con l'ausilio delle (3.3), (3.4) e della (3.1) è possibile scrivere un'equazione di moto per la $W_s(\alpha, \alpha^*; \rho)$ nella forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) &\equiv \text{Tr}\{\dot{\rho} D_s(\lambda, \lambda^*)\} e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \\ &= \int \frac{d^2\lambda}{\pi} \text{Tr}\{\mathcal{L}(\rho) D_s(\lambda, \lambda^*)\} e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} = W_s(\alpha, \alpha^*; \mathcal{L}(\rho)) . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nella (3.5) si è generalizzato le (3.3) e (3.4) nelle relazioni seguenti

$$F_s(\lambda, \lambda^*; O) \equiv \text{Tr}[OD_s(\lambda, \lambda^*)] = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_s(\alpha, \alpha^*; O) e^{\alpha^*\lambda - \alpha\lambda^*} \quad (3.6)$$

$$W_s(\alpha, \alpha^*; O) = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} F_s(\lambda, \lambda^*; O) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda}, \quad (3.7)$$

valide per un generico operatore \hat{O} , che nel seguito sarà della forma $f(a, a^\dagger) \rho g(a, a^\dagger)$.

Occorre a questo punto disporre di una serie di regole che consentano di esprimere la funzione $W_s(\alpha, \alpha^*; \mathcal{L}(\rho))$ in termini di $W_s(\alpha, \alpha^*; \rho)$ e delle sue derivate rispetto ad α e α^* . Infatti, dalla (3.5) si ottiene in tal modo l'equazione di Fokker-Planck cercata

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) = \mathcal{F}(\alpha, \alpha^*, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \alpha^*}) W_s(\alpha, \alpha^*; \rho). \quad (3.8)$$

Vedremo che il problema si riconduce al calcolo delle funzioni caratteristiche e delle relative distribuzioni per gli operatori aO , Oa , $a^\dagger O$, Oa^\dagger .

Riscriviamo D_s nelle forme ordinate normalmente e antinormalmente ²

$$\begin{aligned} D_s(\lambda, \lambda^*) &= \left(e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \right) e^{\frac{1}{2}s|\lambda|^2} = e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} e^{\frac{(s-1)}{2}|\lambda|^2}, \quad (3.9) \\ D_s(\lambda, \lambda^*) &= \left(e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^\dagger} e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2} \right) e^{\frac{1}{2}s|\lambda|^2} = e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^\dagger} e^{\frac{(s+1)}{2}|\lambda|^2}, \end{aligned}$$

dalle quali ricaviamo che

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} = \left[a^\dagger + \left(\frac{s-1}{2} \right) \lambda^* \right] D_s(\lambda, \lambda^*), \quad (3.10)$$

²Si è fatto uso della relazione di Baker-Hausdorff $e^{(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda^*} = \left[\left(\frac{s+1}{2} \right) \lambda - a \right] D_s(\lambda, \lambda^*) . \quad (3.11)$$

Dalle equazioni (3.10) e (3.11), con l'ausilio dei commutatori

$$[a^\dagger, e^{-\lambda^* a}] = \lambda^* e^{-\lambda^* a} \quad [a, e^{\lambda a^\dagger}] = \lambda e^{\lambda a^\dagger} ,$$

si ricavano anche le seguenti relazioni

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} = D_s(\lambda, \lambda^*) \left[\left(\frac{s+1}{2} \right) \lambda^* + a^\dagger \right] , \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda^*} = D_s(\lambda, \lambda^*) \left[\left(\frac{s-1}{2} \right) \lambda - a \right] . \quad (3.13)$$

Si noti che, in virtù delle equazioni (3.6) e (3.13), si ottiene un'identità della forma seguente

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s(\lambda, \lambda^*; O)}{\partial \lambda^*} &\equiv \text{Tr} \left\{ O \frac{\partial}{\partial \lambda^*} D_s \right\} = \text{Tr} \left\{ O D_s \left[\left(\frac{s-1}{2} \right) \lambda - a \right] \right\} \\ &= \left(\frac{s-1}{2} \right) \lambda \text{Tr} \{ O D_s(\lambda, \lambda^*) \} - \text{Tr} \{ a O D_s(\lambda, \lambda^*) \} \end{aligned}$$

dalle quale segue la relazione

$$F_s(\lambda, \lambda^*; aO) \equiv \text{Tr} \{ a O D_s(\lambda, \lambda^*) \} = \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \frac{s-1}{2} \lambda \right) F_s(\lambda, \lambda^*; O) . \quad (3.14)$$

Dalle equazioni (3.6) e (3.14) integrando per parti si ottiene una relazione differenziale per W_s

$$\begin{aligned} F_s(\lambda, \lambda^*; aO) &= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \frac{s-1}{2} \lambda \right] \left\{ e^{\alpha^* \lambda - \alpha \lambda^*} W_s(\alpha, \alpha^*; O) \right\} \\ &= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \left\{ \left[\alpha + \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right] \left\{ e^{\alpha^* \lambda - \alpha \lambda^*} W_s \right\} - \frac{s-1}{2} e^{\alpha^* \lambda - \alpha \lambda^*} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} W_s \right\} \\ &= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{\alpha^* \lambda - \alpha \lambda^*} \left[\alpha - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right] W_s(\alpha, \alpha^*; O) . \quad (3.15) \end{aligned}$$

Nell'equazione (3.15) si è tenuto conto che il termine di bordo derivante dall'integrazione per parti è nullo in quanto W_s s'annulla in modo gaussiano per $|\alpha| \rightarrow \infty$.

In definitiva, all'operatore aO corrisponde quindi la rappresentazione differenziale

$$W_s(\alpha, \alpha^*; aO) = \left(\alpha - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) W_s(\alpha, \alpha^*; O). \quad (3.16)$$

Procedendo analogamente si trovano le seguenti rappresentazioni per le funzioni generatrici

$$F_s(\lambda, \lambda^*; Oa) \equiv \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} + \frac{s+1}{2} \lambda \right) F_s(\lambda, \lambda^*; O) \quad (3.17)$$

$$F_s(\lambda, \lambda^*; a^\dagger O) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{s+1}{2} \lambda^* \right) F_s(\lambda, \lambda^*; O) \quad (3.18)$$

$$F_s(\lambda, \lambda^*; Oa^\dagger) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{s-1}{2} \lambda^* \right) F_s(\lambda, \lambda^*; O) \quad (3.19)$$

e conseguentemente per le funzioni di Wigner

$$W_s(\alpha, \alpha^*; Oa) = \left(\alpha - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) W_s(\alpha, \alpha^*; O) \quad (3.20)$$

$$W_s(\alpha, \alpha^*; a^\dagger O) = \left(\alpha^* - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) W_s(\alpha, \alpha^*; O) \quad (3.21)$$

$$W_s(\alpha, \alpha^*; Oa^\dagger) = \left(\alpha^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) W_s(\alpha, \alpha^*; O). \quad (3.22)$$

Tavola 3.1:

<u>OPERATORE</u>	<u>RAPPRESENTAZIONE</u>
aO	$(\alpha - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*})W_s(\alpha, \alpha^*; O)$
Oa	$(\alpha - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*})W_s(\alpha, \alpha^*; O)$
$a^\dagger O$	$(\alpha^* - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha})W_s(\alpha, \alpha^*; O)$
Oa^\dagger	$(\alpha^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha})W_s(\alpha, \alpha^*; O)$

Riportiamo le regole di corrispondenza 'operatore \rightarrow rappresentazione' in Tabella 1.

Valgono le ovvie proprietà di linearità

$$F_s(\lambda, \lambda^*; \alpha O_1 + \beta O_2) = \alpha F_s(\lambda, \lambda^*; O_1) + \beta F_s(\lambda, \lambda^*; O_2) \quad (3.23)$$

$$W_s(\alpha, \alpha^*; \alpha O_1 + \beta O_2) = \alpha W_s(\alpha, \alpha^*; O_1) + \beta W_s(\alpha, \alpha^*; O_2)$$

e le regole di fattorizzazione:

$$F_s(\lambda, \lambda^*; O_1 O_2 O) = L(O_1) L(O_2) F_s(\lambda, \lambda^*; O) \quad (3.24)$$

$$F_s(\lambda, \lambda^*; O O_1 O_2) = R(O_2) R(O_1) F_s(\lambda, \lambda^*; O),$$

dove $R(O_n)$ e $L(O_n)$ rappresentano l'operatore differenziale corrisponden-

te alla moltiplicazione a destra e a sinistra per O_n rispettivamente. Dalle (3.23) e dalle (3.24) si ottiene che per generiche funzioni analitiche $f(a, a^\dagger)$ e $g(a, a^\dagger)$, valgono le corrispondenze

$$\begin{aligned} f(a, a^\dagger)\rho &\rightarrow f\left(\alpha - \frac{s-1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}, \alpha^* - \frac{s+1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) \\ \rho g(a, a^\dagger) &\rightarrow g\left(\alpha - \frac{s+1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}, \alpha^* - \frac{s-1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^T W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) \end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned} f(a, a^\dagger)\rho g(a, a^\dagger) &\rightarrow \\ &f\left(\alpha - \frac{s-1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}, \alpha^* - \frac{s+1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)g\left(\alpha - \frac{s+1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}, \alpha^* - \frac{s-1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^T W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) \end{aligned}$$

dove con g^T si intende che in ogni monomio in a e a^\dagger gli operatori vengano fatti agire in ordine inverso.

Riportiamo nella pagina seguente una tabella di corrispondenze per monomi bilineari in a e a^\dagger .

Tavola 3.2:

<u>OPERATORE</u>	<u>RAPPRESENTAZIONE</u>
$a\rho a^\dagger$	$ \alpha ^2 - \frac{s-1}{2}\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{(s-1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}$
$a^\dagger \rho a$	$ \alpha ^2 - \frac{s+1}{2}\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \frac{(s+1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}$
$\rho a a$	$\alpha^2 - (s+1)\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{(s+1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}}$
$a a \rho$	$\alpha^2 - (s-1)\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{(s-1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}}$
$\rho a^\dagger a^\dagger$	$\alpha^{*2} - (s-1)\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{(s-1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$
$a^\dagger a^\dagger \rho$	$\alpha^{*2} - (s+1)\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{(s+1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$
$a^\dagger a \rho$	$ \alpha ^2 - \frac{s-1}{2}\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}$
$\rho a a^\dagger$	$ \alpha ^2 - \frac{s+1}{2}\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}$
$\rho a^\dagger a$	$ \alpha ^2 - \frac{s-1}{2}\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}$

3.3 Esempi di applicazione del metodo

ESEMPIO N. (1)

Riprendiamo ora l'espressione della master equation che descrive il moto irreversibile di un sistema a causa del damping per interazione con una riserva con rate di decadimento γ . Riscrivendo per esteso tutti i termini si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \gamma(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + 2\gamma\bar{n}(a\rho a^\dagger + a^\dagger \rho a - a^\dagger a\rho - \rho a a^\dagger) \quad (3.25) \\ &= 2\gamma(\bar{n} + 1)a\rho a^\dagger - \gamma(1 + 2\bar{n})a^\dagger a\rho - \gamma\rho a^\dagger a + 2\gamma\bar{n} a^\dagger \rho a - 2\gamma\bar{n} \rho a a^\dagger\end{aligned}$$

In base alle regole precedentemente trovate e dalla Tabella 2 si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) &= \left\{ 2\gamma(\bar{n} + 1) \left(\alpha^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\alpha - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \right. \quad (3.26) \\ &\quad - \gamma(1 + 2\bar{n}) \left(\alpha^* - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \left(\alpha - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \\ &\quad - \gamma \left(\alpha - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\alpha^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) + 2\gamma\bar{n} \left(\alpha - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\alpha^* - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \\ &\quad \left. - 2\gamma\bar{n} \left(\alpha^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \left(\alpha - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \right\} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) \\ &= \left\{ 2\gamma(\bar{n} + 1) \left[|\alpha|^2 - \frac{s-1}{2} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{(s-1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \right. \\ &\quad - \gamma(1 + 2\bar{n}) \left[|\alpha|^2 - \frac{s-1}{2} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \\ &\quad - \gamma \left[|\alpha|^2 - \frac{s-1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \\ &\quad + 2\gamma\bar{n} \left[|\alpha|^2 - \frac{s+1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \frac{(s+1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \\ &\quad \left. - 2\gamma\bar{n} \left[|\alpha|^2 - \frac{s+1}{2} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \right\} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho).\end{aligned}$$

Raccogliendo e semplificando si trova infine l'espressione

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) &= \left\{ 2\gamma\bar{n} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{(s-1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} + \frac{s}{2} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right. \right. \\
&\quad - \frac{s}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \frac{(s+1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} + \frac{\alpha^*}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \\
&\quad \left. \left. + \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] + \gamma \left[1 + \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + (1-s) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \right\} W_s \\
&= \left\{ \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right] + 2\gamma \left(\bar{n} + \frac{1-s}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right\} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho), \quad (3.27)
\end{aligned}$$

ovvero l'equazione di Fokker-Planck nella generica rappresentazione $W_s(\alpha, \alpha^*; \rho)$.

ESEMPIO N. (2)

Consideriamo come ulteriore applicazione un sistema (convertitore di frequenza) che coinvolge due distinti modi di cavità accoppiati fra di loro. La relativa Master equation è [6]

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= A[a^\dagger{}^2 b - a^2 b^\dagger, \rho] - [Bb^\dagger + Cb, \rho] \quad (3.28) \\
&+ k(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + k_p(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b) \\
&= A[a^\dagger a^\dagger b\rho - \rho a^\dagger a^\dagger b - aab^\dagger\rho + \rho aab^\dagger] + B[\rho b^\dagger - b^\dagger\rho] \\
&+ C[\rho b - b\rho] + k(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + k_p(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b)
\end{aligned}$$

Utilizzando ora le regole di sostituzione date nella Tabella 2 è possibile passare direttamente all'equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_s(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*; \rho) = A \left\{ \left[\alpha^{*2} - (s+1)\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{(s+1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \left(\beta - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\beta - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) \left[\alpha^{*2} - (s-1)\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{(s-1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \\
& - \left[\alpha^2 - (s-1)\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{(s-1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right] \left(\beta^* - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \\
& + \left(\beta^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \left[\alpha^2 - (s+1)\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{(s+1)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right] \left. \right\} + B \left[\left(\beta^* - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right. \\
& - \left. \left(\beta^* - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] + C \left[\left(\beta - \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) - \left(\beta - \frac{s-1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) \right] \\
& + k \left[2|\alpha|^2 - (s-1)\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - (s-1) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{(s-1)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} - |\alpha|^2 + \frac{s-1}{2} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right. \\
& + \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} - |\alpha|^2 + \frac{s-1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \\
& \left. - \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] + k_p \left[2|\beta|^2 - (s-1)\beta^* \frac{\partial}{\partial \beta^*} - (s-1) \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \right. \\
& + \frac{(s-1)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} - |\beta|^2 + \frac{s-1}{2} \beta^* \frac{\partial}{\partial \beta^*} + \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta - \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \\
& \left. - |\beta|^2 + \frac{s-1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{s+1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \beta^* - \frac{s^2-1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \right]
\end{aligned}$$

Componendo le derivate e collezionando i vari termini si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} W_s(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*; \rho) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[k\alpha - 2A\alpha^*\beta \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[k\alpha^* - 2A\alpha\beta^* \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[k_p\beta + A\alpha^2 + B \right] + \frac{\partial}{\partial \beta^*} \left[k_p\beta^* + A\alpha^{*2} - C \right] \\
&+ k(1-s) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} + k_p(1-s) \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} + As \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \beta^* \right) \\
&+ \frac{1}{4} A(1-s^2) \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^*} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha^{*2} \partial \beta} \right) \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Si noti che le derivate al terzo ordine possono essere eliminate scegliendo $s = \pm 1$. A causa del carattere non lineare dell'accoppiamento dei due modi

di sistema, non è possibile trovare una soluzione analitica per l'equazione (3.29).

Riportiamo infine un metodo alternativo di riduzione della M.E. in Fokker-Planck . Esso può essere schematizzato nei seguenti passi:

(I) derivazione dell'equazione di moto per la funzione caratteristica

$$F_s(\lambda, \lambda^*; \rho) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) e^{\alpha^*\lambda - \alpha\lambda^*} , \quad (3.30)$$

tenendo conto che per la F_1 vale la relazione

$$F_1(\lambda, \lambda^*; \rho) = \text{Tr}\{\rho e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a}\} = F_s(\lambda, \lambda^*; \rho) e^{(\frac{1-s}{2})|\lambda|^2} ; \quad (3.31)$$

(II) dopo aver ottenuto l'equazione di moto per la F_s nella forma

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = e^{(\frac{s-1}{2})|\lambda|^2} \text{Tr} \{e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} \mathcal{L}(\rho)\} , \quad (3.32)$$

manipolazione algebrica del secondo membro della (3.32) in modo da poterlo esprimere in termini di F_1 e delle sue derivate rispetto a λ e λ^* .

(III) trasformazione dell'equazione di moto ottenuta

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = e^{(\frac{s-1}{2})|\lambda|^2} [f(\lambda, \lambda^*, \partial_\lambda, \partial_{\lambda^*})] F_1 , \quad (3.33)$$

nella forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial t} &= [f(\lambda, \lambda^*, \partial_\lambda, \partial_{\lambda^*}) - g(\lambda, \lambda^*, \partial_\lambda, \partial_{\lambda^*}, s)] (F_1 e^{(\frac{s-1}{2})|\lambda|^2}) \\ &= [f - g] F_s \quad (g = 0 \text{ per } s = 1) \end{aligned} \quad (3.34)$$

(IV) tramite la (3.30), derivazione dell'eq. di moto per $W(\alpha, \alpha^*; s)$ nella forma

$$\begin{aligned} & \int d^2\alpha \frac{\partial W_s(\alpha, \alpha^*, t; \rho)}{\partial t} e^{-\alpha\lambda^*} e^{\alpha^*\lambda} = \\ & = \int d^2\alpha W \left[f(\lambda, \lambda^*, \partial_\lambda, \partial_{\lambda^*}) - g(\lambda, \lambda^*, \partial_\lambda, \partial_{\lambda^*}, s) \right] e^{-\alpha\lambda^*} e^{\alpha^*\lambda} \end{aligned} \quad (3.35)$$

(V) integrazione per parti e quindi la Fokker-Planck desiderata.

È evidente che, fra i cinque steps, il (II) risulta tanto più laborioso, quanto più è complicata la forma operatoriale della Master equation.

3.4 Fokker-Planck generalizzata per il laser

Verrà ora mostrato come sia possibile derivare un'equazione di Fokker-Planck a partire da una M.E. che comprenda oltre a variabili di campo anche variabili di tipo atomico, come avviene nella descrizione del laser. Si otterrà così l'equazione generalizzata per il laser come in Ref. [4].

Si consideri un sistema di N atomi a due livelli interagenti con un modo di campo risonante alla frequenza di transizione atomica ω_0 .

All'atomo i -esimo risultano associati gli operatori atomici di innalzamento e abbassamento r_i^+ , r_i^- e di inversione di popolazione $r_{3i} = \frac{1}{2}(r_i^+ r_i^- - r_i^- r_i^+)$.

Il sistema di atomi può venir descritto in termini di operatori collettivi R^\pm (polarizzazione macroscopica) e R_3 (metà dell'inversione di popolazione

totale), definiti come segue

$$R^\pm = \sum_{i=1}^N e^{\pm i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}_i} r_i^\pm \quad R_3 = \sum_{i=1}^N r_{3i} \quad (3.36)$$

e per i quali valgono le regole di commutazione per il momento angolare

$$[R^+, R^-] = 2 R_3, \quad [R_3, R^\pm] = \pm R^\pm .$$

Nello schema di interazione per la matrice densità il sistema obbedisce alla master-equation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_{AF}, \rho] + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_A + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_F . \quad (3.37)$$

L'interazione, in approssimazione di onda rotante, è descritta dalla Hamiltoniana

$$H_{AF} = \hbar g (a^\dagger R^- + a R^+) , \quad (3.38)$$

dove $g = \mu(2\pi\omega_0/\hbar V)^{1/2}$ è la costante di accoppiamento (μ è il momento di dipolo atomico e V il volume della cavità risonante contenente gli atomi).

La dinamica di pompaggio e di decadimento atomici è descritta dal termine

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_A &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{A,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \gamma_\uparrow ([r_i^+, \rho r_i^-] + [r_i^+ \rho, r_i^-]) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\downarrow ([r_i^-, \rho r_i^+] + [r_i^- \rho, r_i^+]) \right\} , \end{aligned} \quad (3.39)$$

dove $\gamma_\uparrow, \gamma_\downarrow$ sono i *rate* di transizione tra i due livelli otticamente attivi.

La condizione per ottenere azione laser è $\gamma_\uparrow > \gamma_\downarrow$, (inversione di popolazione positiva).

Il nostro scopo è quello di derivare dalla (3.37) un'equazione del tipo

$$\frac{\partial W(\rho)}{\partial t} = L W(\rho) , \quad (3.40)$$

dove $L = L_{AF} + L_A + L_F$ è l'operatore Liouvilliano contenente la parte di interazione, atomica e di campo.

Analogamente a quanto fatto in precedenza, definiamo una funzione caratteristica anche per la parte atomica nel modo seguente:

$$F(\xi, \xi^*, \eta, \beta, \beta^*) = \text{Tr} \{ \rho D_{AF} \} , \quad (3.41)$$

$$D_{AF} \equiv D_A D_F = \prod_{i=1}^N D_{A_i} \cdot D_F = \left(\prod_{i=1}^N e^{i\xi^* r_i^+} e^{i\eta r_{3i}} e^{i\xi r_i^-} \right) \cdot e^{i\beta^* a^\dagger} e^{i\beta a} . \quad (3.42)$$

Definiamo quindi, attraverso la trasformata di Fourier della F , la distribuzione di quasi-probabilità

$$W(v, v^*, m, \alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^5} \int d^2\xi d^2\beta d\eta e^{-i(v\xi + v^*\xi^* + m\eta + \alpha\beta + \alpha^*\beta^*)} F \quad (3.43)$$

che è un'estensione alle variabili atomiche della rappresentazione P .

Se si guarda infatti alla sola parte di campo, posto $\lambda = i\beta^*$, notiamo che D_F coincide con l'operatore dato dalla (3.9) a patto di usare il valore $s = 1$ associato alla distribuzione P .

Generalizziamo come prima le (3.41), (3.43) per un generico operatore O ,

$$F(O) \equiv F(\xi, \xi^*, \eta, \beta, \beta^*; O) = \text{Tr} [O D_{AF}] , \quad (3.44)$$

$$W(v, v^*, m, \alpha, \alpha^*; O) = \frac{1}{\pi^5} \int d^2\xi d^2\beta d\eta e^{-i(v\xi + v^*\xi^* + m\eta + \alpha\beta + \alpha^*\beta^*)} F(O). \quad (3.45)$$

Per la parte puramente di campo otterremo di nuovo le regole di corrispondenza della Tabella 1 e perciò

$$L_F = \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right] + 2\gamma \bar{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}. \quad (3.46)$$

Consideriamo ora la parte di interazione atomi/radiazione:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{AF} = -ig \left(a^\dagger R^- \rho - \rho a^\dagger R^- + a R^+ \rho - \rho a R^+ \right).$$

Si possono ricavare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} R^+ D_A &= \frac{\partial D_A}{\partial i\xi^*} & D_A R^- &= \frac{\partial D_A}{\partial i\xi} \\ D_A R^+ &= \left[e^{i\eta} \frac{\partial}{\partial i\xi^*} - (i\xi)^2 \frac{\partial}{\partial i\xi} - 2i\xi \frac{\partial}{\partial i\eta} \right] D_A \\ R^- D_A &= \left[e^{i\eta} \frac{\partial}{\partial i\xi} - (i\xi^*)^2 \frac{\partial}{\partial i\xi^*} - 2i\xi^* \frac{\partial}{\partial i\eta} \right] D_A, \end{aligned} \quad (3.47)$$

dalle quali discendono in maniera diretta

$$F(OR^+) = \frac{\partial F(O)}{\partial i\xi^*} \quad F(R^-O) = \frac{\partial F(O)}{\partial i\xi} \quad (3.48)$$

$$F(R^+O) = \left[e^{i\eta} \frac{\partial}{\partial i\xi^*} - (i\xi)^2 \frac{\partial}{\partial i\xi} - 2i\xi \frac{\partial}{\partial i\eta} \right] F(O)$$

$$F(OR^-) = \left[e^{i\eta} \frac{\partial}{\partial i\xi} - (i\xi^*)^2 \frac{\partial}{\partial i\xi^*} - 2i\xi^* \frac{\partial}{\partial i\eta} \right] F(O).$$

Tavola 3.3:

<u>OPERATORE</u>	<u>RAPPRESENTAZIONE</u>
R^-O	$v W$
OR^+	$v^* W$
R^+O	$\left[e^{-\frac{\partial}{\partial m}} v^* - \frac{\partial^2}{\partial v^2} v + 2 \frac{\partial}{\partial v} m \right] W$
OR^-	$\left[e^{-\frac{\partial}{\partial m}} v - \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} v^* + 2 \frac{\partial}{\partial v^*} m \right] W$

In modo analogo a quanto già visto, inserendo la (3.44) nel gruppo di relazioni (3.48), otterremo le corrispondenti relazioni di probabilità (da usarsi unitamente a quelle di Tabella 1 per la parte di campo) che sono riassunte in Tabella 3.

Il liouvilliano d'interazione che ne consegue assume la forma :

$$\begin{aligned}
L_{AF} = & - ig \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha^* \right) v - \left[e^{-\frac{\partial}{\partial m}} v - \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} v^* + 2 \frac{\partial}{\partial v^*} m \right] \alpha^* \right. \\
& \left. - \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \alpha \right) v^* + \left[e^{-\frac{\partial}{\partial m}} v^* - \frac{\partial^2}{\partial v^2} v + 2 \frac{\partial}{\partial v} m \right] \alpha \right\} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Per la parte atomica della M.E. non è possibile dedurre simili regole

di corrispondenza operatoriale, bensì è necessario applicare il metodo come delineato alla fine del precedente paragrafo.

Ricaviamo perciò l'equazione di moto per la funzione generatrice F_A

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_A = \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left\{ D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{A_i} \right\} = \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left\{ D_{A_i} D' \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{A_i} \right\}, \quad (3.50)$$

dove

$$D' \equiv \prod_{k \neq i}^N D_{A_k} \cdot D_F.$$

Tenendo presenti la (3.50) e la (3.39) otterremo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left\{ \gamma_{\uparrow} \left[2r_i^- D_{A_i} r_i^+ D' \rho + r_{3i} D_{A_i} D' \rho + D_{A_i} r_{3i} D' \rho - F \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{\downarrow} \left[2r_i^+ D_{A_i} r_i^- D' \rho - r_{3i} D_{A_i} D' \rho - D_{A_i} r_{3i} D' \rho - F \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dopo non troppo immediate manipolazioni algebriche è possibile esprimere il secondo membro della (3.51) in termini di F e delle sue derivate rispetto a $i\xi$, $i\xi^*$, $i\eta$; si trova infatti che

$$\begin{aligned} r_{3i} D_{A_i} &= i\xi^* \frac{\partial D_{A_i}}{\partial i\xi^*} + \frac{\partial D_{A_i}}{\partial i\eta}, \quad D_{A_i} r_{3i} = i\xi \frac{\partial D_{A_i}}{\partial i\xi} + \frac{\partial D_{A_i}}{\partial i\eta} \quad (3.52) \\ r_i^- D_{A_i} r_i^+ &= \left\{ \left[\frac{e^{i\eta}}{2} + i\xi i\xi^* + \frac{e^{-i\eta}}{2} (i\xi)^2 (i\xi^*)^2 \right] - [(i\xi)^2 i\xi^* + i\xi e^{i\eta}] \frac{\partial}{\partial i\xi} \right. \\ &\quad \left. - [(i\xi^*)^2 i\xi + i\xi^* e^{i\eta}] \frac{\partial}{\partial i\xi^*} + [e^{-i\eta} (i\xi)^2 (i\xi^*)^2 - e^{i\eta}] \frac{\partial}{\partial i\eta} \right\} D_{A_i}, \\ r_i^+ D_{A_i} r_i^- &= \frac{e^{-i\eta}}{2} D_{A_i} + e^{-i\eta} \frac{\partial D_{A_i}}{\partial i\eta}. \end{aligned}$$

Di conseguenza la (3.51) assume la forma voluta:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_A = \left\{ \frac{\gamma_{\uparrow}}{2} \left\{ N \left[e^{i\eta} + 2i\xi i\xi^* + e^{-i\eta} (i\xi)^2 (i\xi^*)^2 - 1 \right] \right. \right. \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
& - 2i\xi \left[i\xi i\xi^* + e^{i\eta} - \frac{1}{2} \right] \frac{\partial}{\partial i\xi} - 2i\xi^* \left[i\xi i\xi^* + e^{i\eta} - \frac{1}{2} \right] \frac{\partial}{\partial i\xi^*} \\
& + 2 \left[e^{-i\eta} (i\xi)^2 (i\xi^*)^2 - e^{i\eta} + 1 \right] \frac{\partial}{\partial i\eta} \Bigg\} \\
& + \frac{\gamma_{\downarrow}}{2} \left[N (e^{-i\eta} - 1) - i\xi^* \frac{\partial}{\partial i\xi^*} - i\xi \frac{\partial}{\partial i\xi} + 2 (e^{-i\eta} - 1) \right] \frac{\partial}{\partial i\eta} \Bigg\} F .
\end{aligned}$$

Inserendo poi la (3.53) nell'equazione di moto per la (3.43) si avrà

$$\begin{aligned}
L_A &= \frac{\gamma_{\uparrow}}{2} \left\{ N \left(e^{-\frac{\partial}{\partial m}} - 1 \right) + N e^{\frac{\partial}{\partial m}} \frac{\partial^4}{\partial v^2 \partial v^{*2}} + 2N \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} \right. & (3.54) \\
& + \frac{\partial}{\partial v} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} + 2e^{-\frac{\partial}{\partial m}} - 1 \right] v + \frac{\partial}{\partial v^*} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} + 2e^{-\frac{\partial}{\partial m}} - 1 \right] v^* \\
& - 2 \left[N \left(e^{-\frac{\partial}{\partial m}} - 1 \right) - e^{\frac{\partial}{\partial m}} \frac{\partial^4}{\partial v^2 \partial v^{*2}} \right] m \Bigg\} \\
& + \frac{\gamma_{\downarrow}}{2} \left\{ N \left(e^{\frac{\partial}{\partial m}} - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial v} v + \frac{\partial}{\partial v^*} v^* + 2 \left(e^{\frac{\partial}{\partial m}} - 1 \right) m \right\} .
\end{aligned}$$

Il liouvilliano totale L che si forma è di ordine infinito per la presenza delle funzioni esponenziali nella variabile m e si può pensare di approssimarlo troncando le derivate di ordine superiore al secondo: questo purtroppo non dà origine a un'equazione di Fokker-Planck ordinaria, che come avanti si vedrà richiede la matrice di diffusione definita positiva.

Tuttavia è possibile, riscalando opportunamente le variabili nella situazione di laser alla soglia, derivare un'equazione al secondo ordine con un buon 'comportamento' (coefficiente di diffusione positivo). In prossimità della soglia valgono le relazioni

$$|\alpha|^2 \approx n_{thr} \propto \sqrt{N} \quad v \sim N^{\frac{3}{4}} \quad m \sim N \quad (3.55)$$

Considerando poi la densità di atomi $\rho_0 = N/V$ costante e facendo tendere la dimensione del laser a infinito, è possibile assumere $N \propto V$ per $N \rightarrow \infty$. In tal modo per la costante di accoppiamento g , dipendente dal volume, si trova $g \propto V^{-\frac{1}{2}} \propto N^{-\frac{1}{2}}$.

Introducendo infine i parametri

$$m_0 \equiv N \frac{\gamma_{\uparrow} - \gamma_{\downarrow}}{\gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow}} \quad \bar{\gamma} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{\uparrow} + \gamma_{\downarrow})$$

e adottando lo scaling dimensionale dato dalla (3.55) è possibile trascurare tutte le derivate di ordine superiore al secondo. Si ottiene così, in una forma simile a quanto riportato in Ref. [7], l'equazione di Fokker-Planck :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} (-\gamma \alpha - igv) - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (-\gamma \alpha^* + igv^*) - \frac{\partial}{\partial v} (-\bar{\gamma}v + 2ig\alpha m) \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial v^*} (-\bar{\gamma}v^* - 2ig\alpha^* m) - \frac{\partial}{\partial m} [-\bar{\gamma}(2m - m_0) - ig(v^*\alpha - v\alpha^*)] \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} N\gamma_{\uparrow} + 2\gamma \frac{\bar{n}}{\sqrt{N}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right\} W . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Si noti che, fisicamente, i termini di diffusione (a coefficienti positivi) nell'equazione (3.56) sono originati dai soli termini di 'damping' L_A e L_F della master equation, mentre l'interazione L_{AF} contribuisce solo ai termini di drift.

3.5 Fokker-Planck nelle rappresentazioni P e 'numero'

Riprendiamo ora l'espressione della Fokker-Planck ricavata nel primo esempio

$$\frac{\partial W_s(\alpha, \alpha^*; \rho)}{\partial t} = \left\{ \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right] + 2\gamma \left(\bar{n} + \frac{1-s}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right\} W_s(\alpha, \alpha^*; \rho) \quad (3.57)$$

La soluzione della (3.57) descrive il decadimento irreversibile del sistema verso lo stato d'equilibrio termico. Per il campo iniziale nello stato coerente $|\alpha_0\rangle$, la soluzione nella rappresentazione $W_s(\alpha, \alpha^*; \rho)$ è

$$W_s(\alpha, \alpha^*, t | \alpha_0, \alpha_0^*, 0) = \frac{1}{\pi(\bar{n} + \frac{1-s}{2})(1 - e^{-2\gamma t})} \exp \left[-\frac{|\alpha - \alpha_0 e^{-\gamma t}|^2}{(\bar{n} + \frac{1-s}{2})(1 - e^{-2\gamma t})} \right]$$

ovvero una Gaussiana bidimensionale. (Nella rappresentazione P , ossia per $s = 1$, la distribuzione di quasi-probabilità iniziale è delforme, $P(\alpha_0, \alpha_0^*, 0) = \delta^2(\alpha - \alpha_0)$). Il valor medio di tale distribuzione si identifica con l'ampiezza del campo che decade

$$\langle a(t) \rangle = \langle a(0) \rangle e^{-\gamma t} \equiv \alpha_0 e^{-\gamma t}. \quad (3.58)$$

Lo stato coerente iniziale $|\alpha_0\rangle$ è attenuato in ampiezza e il *quantum noise* $\bar{n}(1 - e^{-2\gamma t})$ aumenta col tempo fino al valore di saturazione \bar{n} per $t \rightarrow \infty$, quando l'energia coerente del modo di radiazione è trasferita alla riserva.

Considerando la (3.27) per lo stato stazionario si ottiene l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha P + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* P + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} P = 0, \quad (3.59)$$

che, con la condizione al contorno di annullamento di P per $|\alpha| \rightarrow \infty$, ha come soluzione la distribuzione termica con valor medio \bar{n}

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-|\alpha|^2/\bar{n}} . \quad (3.60)$$

È possibile inoltre ricavare un'equazione di Fokker-Planck approssimata per gli elementi diagonali della matrice densità. A tale scopo riprendiamo la M.E. per la probabilità p_n del numero di fotoni

$$\begin{aligned} \dot{p}_n = & -2\gamma(\bar{n} + 1)[np_n - (n + 1)p_{n+1}] - \\ & -2\gamma\bar{n}[np_n - (n - 1)p_{n-1} + p_n - p_{n-1}] . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Sostituendo a n la variabile continua x (con $x \gg 1$ e $\bar{n} \gg 1$) si perviene alla seguente equazione di Fokker-Planck

$$\dot{p} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial x} [(x - \bar{n})p] + 2\gamma\bar{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (xp) . \quad (3.62)$$

Si ha lo stato stazionario ($\dot{p} = 0$)

$$p(x) = p(0)e^{-x/\bar{n}} = \frac{1}{\bar{n}} e^{-x/\bar{n}} , \quad (3.63)$$

in accordo con la rappresentazione numero del risultato esatto dato dalla (3.60).

In via del tutto generale possiamo considerare una forma unidimensionale dell'equazione di Fokker-Planck del tipo

$$\dot{p}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (D_1(x) p) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_2(x) p) , \quad (3.64)$$

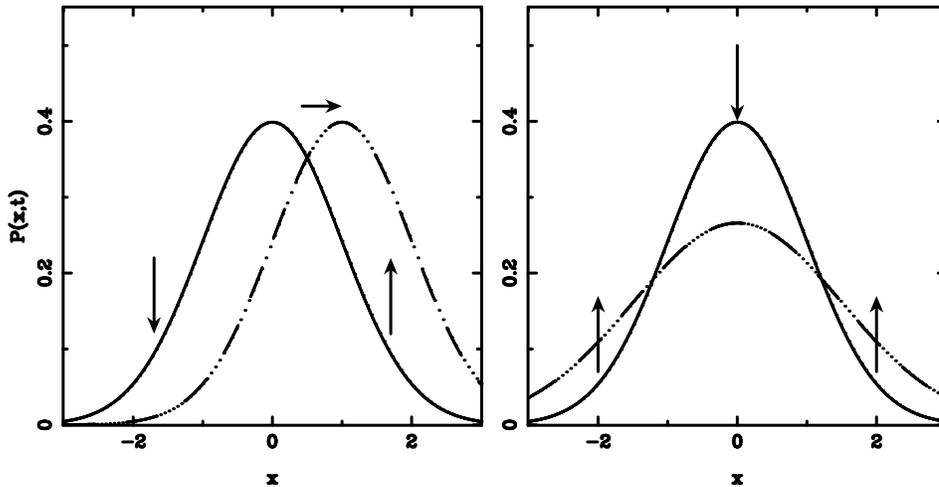


Figura 3.1: Illustrazione dei meccanismi di drift e di diffusione.

dove $D_1(x)$ e $D_2(x)$ sono chiamati comunemente coefficienti di *drift* e di *diffusione*.

I meccanismi dovuti a tali termini sono in figura 3.1. Alla sinistra del massimo di D_1p , la pendenza di D_1p è positiva e perciò il termine di drift ($D_1 > 0$) deprime $p(x)$, a destra la derivata è negativa e $p(x)$ subisce un aumento: ne risulta uno spostamento di $p(x)$ (drift) nella direzione di x crescente.

Per quanto riguarda il termine di diffusione, la derivata seconda è negativa nel massimo di D_2p , con conseguente decremento della $p(x)$, mentre esternamente ai flessi è positiva e $p(x)$ tende ad aumentare : la distribuzione quindi è sottoposta ad un processo di diffusione.

Per il caso n-dimensionale l'equazione di Fokker -Planck assumerà la forma

$$\frac{\partial P(\bar{n}x, t)}{\partial t} = \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} q_i(\bar{n}x) + \sum_{ij=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(\bar{n}x) \right] P(\bar{n}x, t), \quad (3.65)$$

dove $q_i(\bar{n}x)$ e $D_{ij}(\bar{n}x)$ sono le matrici di drift e diffusione, funzioni in genere delle variabili x_i .

Vista nel suo contesto originario, la Fokker-Planck è un'equazione che governa l'evoluzione della distribuzione di probabilità condizionata $P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, 0)$ per un sistema le cui proprietà sono descrivibili in termini delle variabili stocastiche x_1, x_2, \dots, x_n .

Riprendiamo ora il caso unidimensionale e consideriamo coefficienti costanti:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -q \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (3.66)$$

Introducendo la trasformata di Fourier della $P(x, t)$

$$\tilde{P}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx P(x, t) e^{ikx}, \quad (3.67)$$

otteniamo per la (3.66)

$$\frac{\partial \tilde{P}(k, t)}{\partial t} = iqk \tilde{P}(k, t) - Dk^2 \tilde{P}(k, t), \quad (3.68)$$

e integrando

$$\tilde{P}(k, t) = C e^{-(Dk^2 - iqk)t}. \quad (3.69)$$

Imponendo condizione iniziale deltiforme

$$P(x, 0) = \delta(x - x'), \quad (3.70)$$

attraverso la (3.67) si ottiene $C = e^{ikx'}$.

Eseguendo quindi la trasformata inversa

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-x')} e^{-(Dk^2 - ikq)t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[-Dt k^2 - i(x - x' - qt) k], \end{aligned} \quad (3.71)$$

e ricordando la formula per l'integrale gaussiano

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp[-a z^2 + b z] = (\pi/a)^{1/2} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right),$$

si ottiene la soluzione

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x - x' - qt)^2}{4Dt}\right]. \quad (3.72)$$

Nel caso generale con coefficienti di drift e di diffusione variabili, considerando un'evoluzione per un tempo infinitesimo δt con condizione iniziale delforme centrata in x'

$$P(x, 0) = \delta(x - x') \quad (3.73)$$

si ottiene la funzione di Green dell'equazione di Fokker-Planck

$$P(x, \delta t | x', 0) \equiv \mathcal{G}(x, x'; \delta t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(x')\delta t}} \exp\left[-\frac{[x - x' - q(x')\delta t]^2}{4D(x')\delta t}\right]. \quad (3.74)$$

Capitolo 4

Simulazione dell'equazione di Fokker-Planck

4.1 Introduzione

Verrà ora presentato un metodo Monte-Carlo rivolto alla soluzione delle equazioni di Fokker-Planck in ottica quantistica, basato sulla simulazione del processo diffusivo per la distribuzione di probabilità. Questo metodo, a differenza dell'approccio Monte-Carlo per la master equation [1], si presta meglio a trattare quei casi in cui il numero di fotoni coinvolti sia elevato, come nei laser o negli amplificatori ottici. Come in qualsiasi tecnica Monte-Carlo, l'efficienza del metodo aumenta in particolar modo quando è richiesta una descrizione multidimensionale dei modelli e, di conseguenza, gli usuali algoritmi di integrazione diretta risultano inadatti al calcolo.

Verranno qui presentate le caratteristiche salienti del metodo e della procedura di simulazione, seguite da un esempio d'applicazione a un'equazione

bidimensionale nella rappresentazione P relativa al modello di Van der Pol del laser in prossimità della soglia.

4.2 Nozioni fondamentali sul metodo

Riprendiamo l'equazione di Fokker-Planck nella forma generale

$$\frac{\partial P(\bar{n}x, t)}{\partial t} = -\nabla_{\bar{n}x} \cdot [\bar{n}q(\bar{n}x)P(\bar{n}x, t)] + \frac{1}{2}\nabla_{\bar{n}x} \nabla_{\bar{n}x} : [\bar{n}D(\bar{n}x)P(\bar{n}x, t)] , \quad (4.1)$$

dove $P(\mathbf{x}, t)$ è una distribuzione di probabilità o di quasi-probabilità nello spazio d -dimensionale $\bar{n}R^d$ generato dai vettori $\bar{n}x$, mentre $\bar{n}q(\bar{n}x)$ e $\bar{n}D(\bar{n}x)$ sono rispettivamente il vettore di drift e la matrice di diffusione.

Il vettore $\bar{n}x$, in previsione delle successive applicazioni, può rappresentare un set di numeri di fotoni per distinti modi della radiazione, così come un set di ampiezze complesse del campo: in tal modo la (4.1) corrisponde a un'equazione per la distribuzione di probabilità nelle rappresentazioni numero e P rispettivamente.

È da tener presente come nel metodo in questione si consideri il solo caso di probabilità definite positive. Particolare riguardo verrà quindi posto sulle condizioni iniziali che garantiscano quasi-probabilità $P(\bar{n}x, t)$ positive ad ogni istante.

Come si è visto alla fine del capitolo precedente, la funzione di Green della (4.1) per un'evoluzione di un tempo infinitesimo δt a partire da condizione

iniziale deltiforme $P(\bar{n}x, 0) = \delta(\bar{n}x - \bar{n}x')$ è

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\bar{n}x, \bar{n}x'; \delta t) &\equiv P(\bar{n}x, \delta t | \bar{n}x', 0) = \\ &= \left(\det \bar{n}D(2\pi\delta t)^d \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-(\bar{n}x' - \bar{n}x + \bar{n}q\delta t) \cdot (2\bar{n}D\delta t)^{-1} \cdot (\bar{n}x' - \bar{n}x + \bar{n}q\delta t) \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tenendo conto della relazione

$$P(\bar{n}x, 0) = \int_{\bar{n}R^d} d\bar{n}x' P(\bar{n}x', 0) \delta(\bar{n}x - \bar{n}x'), \quad (4.3)$$

si vede come la funzione di Green descrive in generale l'evoluzione di una generica distribuzione per tempi infinitesimi. Si ha infatti

$$P(\bar{n}x, t + \delta t) = \int_{\bar{n}R^d} d\bar{n}x' P(\bar{n}x', t) \mathcal{G}(\bar{n}x, \bar{n}x'; \delta t), \quad (4.4)$$

e la funzione di Green rappresenta quindi una probabilità di transizione per $P(\bar{n}x, t)$.

In linea di principio si potrebbe iterare il procedimento indicato dalla (4.4) per ottenere la probabilità evoluta per un tempo breve, ma il forte dispendio di tempo di calcolo, perfino con poche dimensioni, rende impraticabile l'integrazione diretta. È a questo punto che, aggirando completamente il problema della quadratura (4.4), interviene il metodo Monte-Carlo di simulazione. Per semplicità trattiamo nel seguito il caso unidimensionale.

La generalizzazione a d dimensioni è molto semplice, data la forma fattorizzata della funzione di Green (4.2) (dopo trasformazione ortogonale che diagonalizza la matrice di diffusione).

Si descrive la probabilità $P(\mathbf{x}, t)$ al generico tempo t per mezzo di un ensemble statistico di N configurazioni $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)\}$; in particolare all'istante iniziale $t = 0$ sarà possibile estrarre il campione da una data distribuzione di probabilità iniziale con l'ausilio degli algoritmi di Metropolis [8].

Il passo principale del metodo consiste proprio nel simulare la (4.4) evolvendo step-by-step la probabilità di ogni punto \mathbf{x} delle configurazioni secondo la distribuzione gaussiana indicata dalla funzione di Green (4.2), il che equivale a calcolare [9]

$$\mathbf{x}_i(t + \delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{q}(\mathbf{x}_i(t)) \delta t + \mathbf{r}(\mathbf{x}_i(t)) , \quad (4.5)$$

dove $\mathbf{r}(t)$ è una variabile random con media nulla e varianza $\mathbf{D}(\mathbf{x}_i(t))\delta t$.

Ora, se per un verso è noto che il valore *vero* di una generica quantità fisica $F(\mathbf{x}, t)$ è rappresentabile con una sua media sulla distribuzione di probabilità relativa $P(\mathbf{x}, t)$

$$\langle F(t) \rangle \equiv \int F(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} , \quad (4.6)$$

risulta d'altra parte evidente che tale approccio statistico fornisce solo una *stima* del valore in termini di media campionaria del tipo

$$\overline{F(t)} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}_i(t)) . \quad (4.7)$$

Tuttavia, a condizione che le configurazioni $\{\mathbf{x}_i(t)\}$ estratte dalla stessa distribuzione di probabilità siano statisticamente indipendenti, il teorema del

limite centrale garantisce l'uguaglianza delle medie (4.6) e (4.7) nel limite di $N \rightarrow \infty$.

Trattando campioni di ampiezza finita N , la media $\overline{F(t)}$ risulta una variabile statistica distribuita in modo gaussiano con varianza

$$\sigma^2(\overline{F(t)}) = \frac{\sigma^2}{N} \simeq \frac{\sigma_F^2}{N}, \quad (4.8)$$

dove la varianza ignota della popolazione σ^2 è stata approssimata con quella sperimentale. La stima dell'errore statistico associato a $\overline{F(t)}$ risulta quindi

$$\epsilon_{\overline{F}} \simeq \sqrt{\frac{\sigma_F^2}{N}} = \sqrt{\frac{F(t)^2 - \overline{F(t)}^2}{N}}. \quad (4.9)$$

Ciò dimostra l'efficacia del metodo per numeri di dimensioni grandi. Infatti l'incertezza sulla quadratura Monte-Carlo decresce come $N^{-1/2}$, indipendentemente dalla dimensione d dello spazio delle configurazioni (con le tecniche usuali d'integrazione invece $\epsilon_{\overline{F}}$ decresce esponenzialmente con d).

Va ricordato inoltre come l'uso di un time-step infinitesimo δt introduca, accanto agli errori statistici, un errore di tipo sistematico nelle quantità calcolate: la funzione di Green (4.2) è infatti soluzione esatta della Fokker-Planck solo nel limite $\delta t \rightarrow 0$. Nella pratica si eseguono evoluzioni temporali con δt sufficientemente brevi e si estrapola il risultato a $\delta t \rightarrow 0$.

4.3 Tecniche di simulazione

4.3.1 L'algoritmo di Metropolis

Il metodo Monte-Carlo al quale ci siamo riferiti comporta come operazione basilare la generazione di punti random all'interno del volume d'integrazione secondo un'assegnata distribuzione di probabilità .

Fra le tante procedure che rispondono a questa esigenza, l'algoritmo di Metropolis è quella più generale, anche se più inefficiente di metodi specifici mirati a distribuzioni di probabilità particolari.

In sostanza l'algoritmo fornisce una sequenza di punti $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n, \dots\}$ distribuiti con densità di probabilità $p(\mathbf{x})$ e generati step-by-step come se venisse 'percorso' un tragitto casuale. Per esemplificare come si sviluppa questo random walk, supponiamo di trovarci nel punto \mathbf{x}_n : per generare il successivo \mathbf{x}_{n+1} viene eseguito uno step di prova che porta nel punto \mathbf{x}_t interno a un cubo multidimensionale di lato δ , centrato in \mathbf{x}_n .

Per ciascuna dimensione ciò equivale al calcolo di

$$x_t = x_n + \delta \cdot (2\gamma - 1) , \quad (4.10)$$

dove δ è lo step massimo del random-walk per ogni coordinata, mentre γ rappresenta un numero random uniformemente distribuito nell'intervallo $[0, 1]$.

Ora, il 'trial step' viene accettato solo se si verifica che

$$r = \frac{p(x_t)}{p(x_n)} > \epsilon , \quad (4.11)$$

dove ϵ è un altro numero casuale uniforme in $[0, 1]$, mentre in caso contrario verrà posto $x_{n+1} = x_n$.

Una scelta ragionevole per l'ampiezza δ dello step sarà quella per la quale il rapporto di 'accettanza' r risulti statisticamente prossimo a 0.5 .

Per come è costruito l'algoritmo, va notato che i punti random generati non risultano fra di loro scorrelati. La correlazione statistica è quantificata dalla funzione di autocorrelazione

$$C(k) = \frac{\langle x_i x_{i+k} \rangle - \langle x_i \rangle^2}{\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2} , \quad (4.12)$$

dove

$$\langle x_i x_{i+k} \rangle = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} x_i x_{i+k} \quad (4.13)$$

Se $C \neq 0$, per $k \neq 0$, significa che i punti x_i non risultano indipendenti. In pratica si tengono solo i punti del random walk ogni k steps, in modo che la funzione di autocorrelazione risulti ≤ 0.1 .

Un'ulteriore avvertenza nell'uso dell'algoritmo riguarda il punto di partenza x_0 per il random walk: per rimuoverne ogni dipendenza nella generazione della sequenza di punti, conviene eseguire in modo preliminare l'algoritmo per un certo numero di step di 'termalizzazione'.

4.3.2 La procedura di simulazione

Presentiamo ora alcune delle caratteristiche fondamentali sulle quali è stata basata la procedura di simulazione, ricordando che quest'ultima presenta un buon grado di versatilità nelle applicazioni a distinti modelli fisici.

Le routines implementate consentono innanzitutto di affrontare equazioni di Fokker-Planck n-dimensionali per il caso generale di matrice di diffusione non diagonale.

Al fine di ottimizzare la gestione della memoria e dei tempi di calcolo, la configurazione globale dei punti random necessaria viene generata, evoluta e statisticamente monitorata 'per blocchi'. Indicando con N_b il numero di tali blocchi statistici di ampiezza n_p , si tratterà di far eseguire per N_b volte la procedura qui di seguito descritta.

Innanzitutto viene generata una configurazione di punti random a partire da una assegnata distribuzione iniziale $p(\mathbf{x})$ ricorrendo all'algoritmo di Metropolis. Viene poi fatta evolvere la configurazione fino a un tempo massimo t_{max} secondo la funzione di Green (4.2), il che equivale ad eseguire per un certo numero n_t di volte l'algoritmo

$$\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \mathbf{r}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{q}(\mathbf{x}_i) \delta t \quad (4.14)$$

dove $\mathbf{r}(t)$ è una variabile random con media nulla e varianza $\mathbf{D}(\mathbf{x}_i)\delta t$ (si noti come \mathbf{D} e \mathbf{q} dipendano dal punto nello spazio).

Il time-step di evoluzione infinitesimo δt risulta dal rapporto fra t_{max} e il numero di passi n_t necessari alla simulazione temporale.

Ai particolari tempi di interesse, nel corso dell'evoluzione temporale, vengono calcolati e aggiornati (includendo l'ultimo campione statistico 'evoluto') i momenti della distribuzione e i relativi errori statistici.

Come si è già accennato, l'errore sistematico dovuto al time-step δt viene eliminato estrapolando i risultati a $\delta t \rightarrow 0$ mediante un fitting lineare.

Viene eseguito un costante controllo sulle condizioni al contorno del processo diffusivo: i punti simulati al di fuori dei limiti previsti vengono 'riflessi' internamente al dominio.

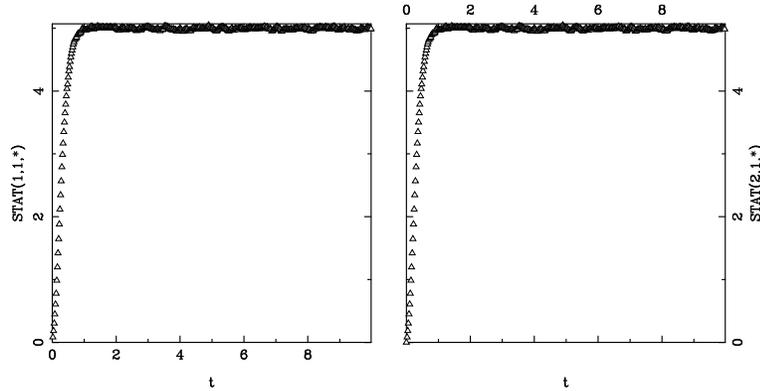


Figura 4.1: Valor medio in funzione del tempo.

Nel caso si debba calcolare quantità fisiche del sistema a 'regime' (ad esempio le funzioni di correlazione), è possibile ridurre i tempi di calcolo sfruttando la proprietà di ergodicità del sistema.

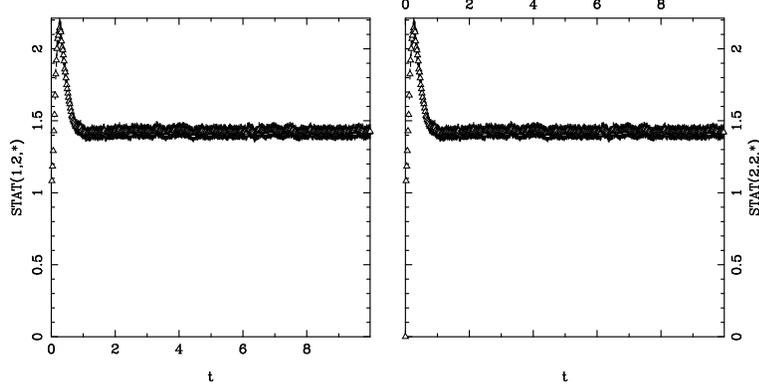


Figura 4.2: Varianza in funzione del tempo.

Infatti, per quantità a regime l'evoluzione delle configurazioni random deve essere condotta fino a un tempo t_{max} sufficientemente lungo ma, d'altra parte, il time-step δt deve essere mantenuto breve per limitare gli errori sistematici e ciò comporta dispendio di tempo-macchina.

È per ovviare a questo che si ricorre alla proprietà di ergodicità del sistema, ovvero all'equivalenza fra le medie di ensemble e quelle temporali,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} d\tau x(\tau) = \langle x_i(t) \rangle . \quad (4.15)$$

Sfruttando l'ergodicità è possibile evolvere temporalmente un solo dato e, con accorgimenti simili al caso 'dinamico', ricavare una statistica per i blocchi statistici temporali.

Naturalmente prima di accumulare medie, è necessario eseguire preventivamente una simulazione 'a vuoto' per un numero sufficiente di time-step,

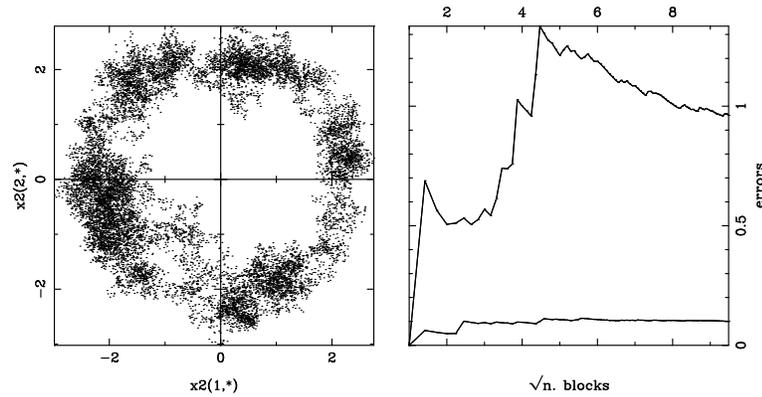


Figura 4.3: Caso stazionario: distribuzione degli eventi e curve degli errori sui primi due momenti. Dalla seconda figura si vede che gli errori non hanno ancora raggiunto la giusta convergenza, anche se il campione è apparentemente ergodico nello spazio delle fasi.

affinchè il sistema giunga a regime.

In fig. 4.1 e in fig. 4.2, con riferimento a un modello di laser che verrà discusso nel paragrafo seguente, sono presentati i controlli sulla convergenza verso lo stato stazionario dei primi due momenti delle distribuzioni di probabilità : in questo modo è possibile dedurre quanti time-steps sono necessari prima di calcolare quantità stazionarie.

Sono riportati in fig. 4.3 i risultati della simulazione riferiti al modello precedente, per un campione di 15000 evoluzioni e con un $t_{max} = 30$: la distribuzione stazionaria in tal caso è isotropa a 'ciambella' e il test grafico mostra quanti punti (time-steps) sono necessari per avere un campione ergodico.

Un ulteriore controllo sull'ergodicità e sulla scelta del numero di blocchi

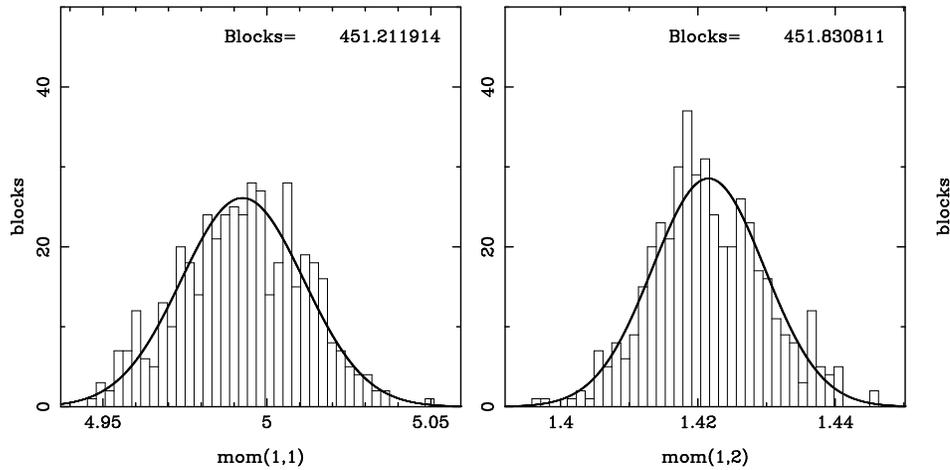


Figura 4.4: Istogramma della distribuzione per i primi due momenti.

e dell'ampiezza del singolo blocco è la verifica che l'errore statistico varia inversamente con la radice quadrata del numero di blocchi per numeri grandi (si veda fig. 4.3).

Sia nel caso dinamico che in quello stazionario, occorre anche verificare che il valor medio e la varianza sui blocchi, visti come variabili random, si distribuiscano in modo gaussiano intorno ai valori medi globali, in accordo col teorema del limite centrale.

Una simile verifica è riportata in fig. 4.4, nella quale è evidente il buon andamento gaussiano della distribuzione campionaria dei blocchi.

4.4 Il modello Van Der Pol di laser alla soglia

Come esempio di applicazione del metodo Monte-Carlo ad un caso bidimensionale, consideriamo un semplice modello monomodale di laser presso la soglia. L'equazione di evoluzione per la quasiprobabilità $P(\alpha, \alpha^*, t)$ nello schema d'interazione è la seguente equazione di Fokker-Planck [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, \alpha^*, t) = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} [(g - |\alpha|^2) \alpha] \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} [(g - |\alpha|^2) \alpha^*] + 4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right\} P(\alpha, \alpha^*, t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Il parametro g è proporzionale al pompaggio e il valore $g = 0$ corrisponde alla condizione di soglia.

L'equazione di Fokker-Planck (4.17) (della stessa forma dell'equazione per un oscillatore classico rotante di Van Der Pol) non è risolvibile analiticamente a causa del termine $|\alpha|^2$. La matrice di diffusione è costante e positiva: quindi in tal caso a partire da condizione iniziale positiva (come per lo stato coerente $|\alpha_0\rangle$ per cui $P = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$) la distribuzione di probabilità si manterrà positiva nel tempo.

Il processo diffusivo avviene in tutto il piano complesso senza alcuna restrizione di bordo.

Viene riportata in fig. 4.5 la distribuzione di probabilità nel piano- α e la relativa rappresentazione 'numero', a partire dalla condizione iniziale $P(\alpha, \alpha^*, 0) = \delta^{(2)}(\alpha)$ - radiazione nello stato di vuoto -, avendo simulato

l'evoluzione per tre tempi differenti e con g costante. Come suggerito dall'equazione (4.17), il processo di diffusione avviene in modo isotropo nel piano- α e la distribuzione di probabilità del numero tende alla poissoniana.

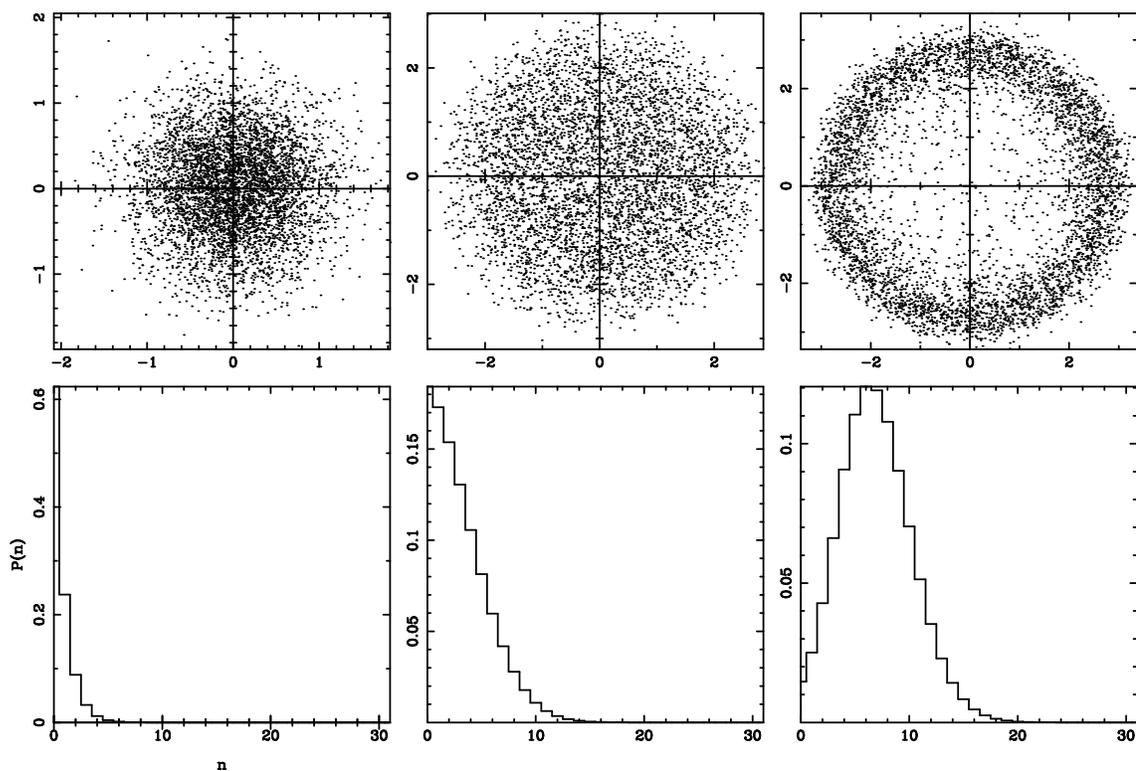


Figura 4.5: distribuzione di probabilità nelle rappresentazioni P e numero per l'equazione (4.17), con $g=5$ e per i tempi $t = 0.08, 0.2, 0.4$.

La distribuzione di probabilità nella rappresentazione numero può essere ottenuta dalla $P(\alpha, \alpha^*; t)$ attraverso la trasformata di Fourier della funzione

generatrice $\text{Tr} \{ \rho e^{ix\hat{n}} \} = \langle e^{ix\hat{n}} \rangle$

$$p(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-inx} \langle e^{ix\hat{n}} \rangle .$$

Infatti con l'ausilio della relazione

$$: e^{ixa^\dagger a} : := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(e^{ix} - 1)^l}{l!} a^{\dagger l} a^l$$

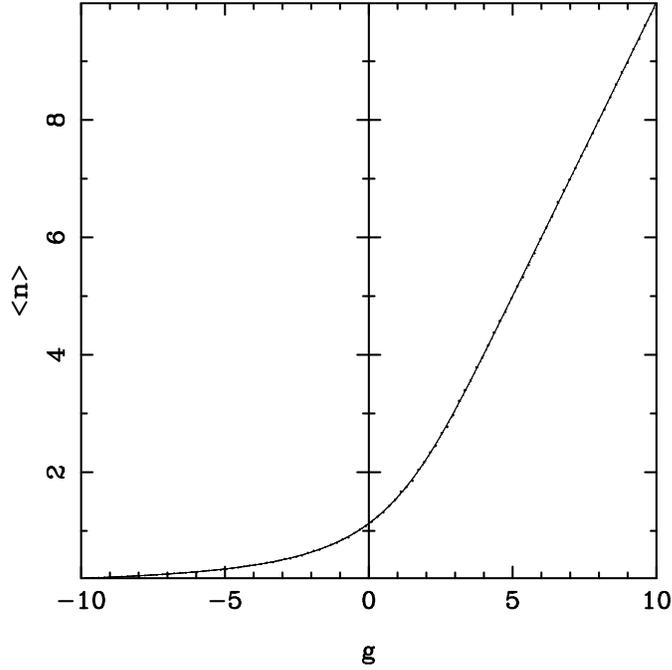


Figura 4.6: Equazione di Van Der Pol (4.17) allo stato stazionario: $\langle n \rangle$ in funzione del parametro di pompaggio g .

si ottiene

$$p(n, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t) e^{|\alpha|^2(e^{ix}-1)} . \quad (4.17)$$

Come verifica dell'affidabilità del metodo Monte-Carlo, è stata eseguita una simulazione per lo stato stazionario del valor medio $\langle n \rangle$ e del fattore di Fano

$$F \equiv \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle n \rangle} = \frac{\langle a^\dagger a^2 \rangle + \langle n \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle}. \quad (4.18)$$

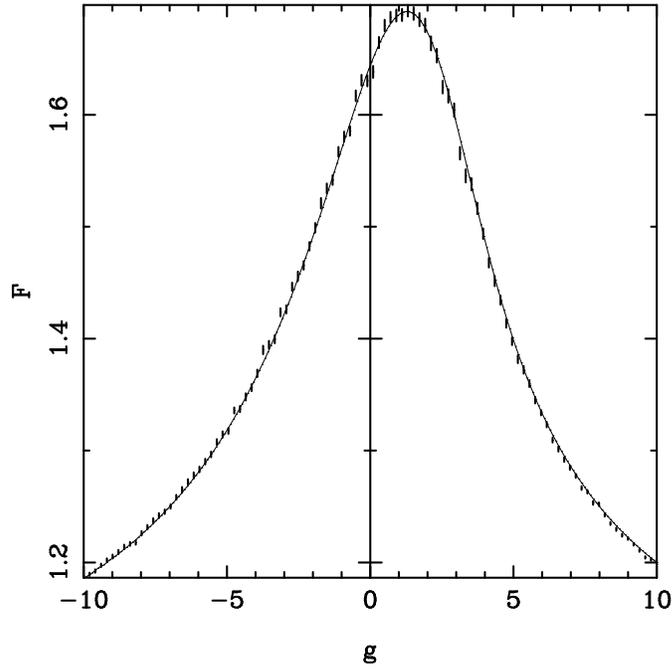


Figura 4.7: Eq. di Van Der Pol (4.17) allo stato stazionario: fattore di Fano F in funzione del parametro di pompaggio g .

Sono riportati in fig. 4.6 e in fig. 4.7 i risultati a confronto con le curve analitiche, per ottenere le quali, si sono usate le espressioni dei momenti

normalmente ordinati (nel caso stazionario)

$$\langle n \rangle = g + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-g^2/4)}{1 + \Phi(g/2)} \quad (4.19)$$

$$\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle = g^2 + 2 + g \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-g^2/4)}{1 + \Phi(g/2)}, \quad (4.20)$$

dove $\Phi(x)$ rappresenta la funzione errore. Per derivare le (4.19), (4.20) si è fatto ricorso alla relazione

$$\langle a^{\dagger m} a^n \rangle \equiv \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*m} \alpha^n, \quad (4.21)$$

nonchè alla $P(\alpha, \alpha^*)$ dello stato stazionario che è ottenibile analiticamente.

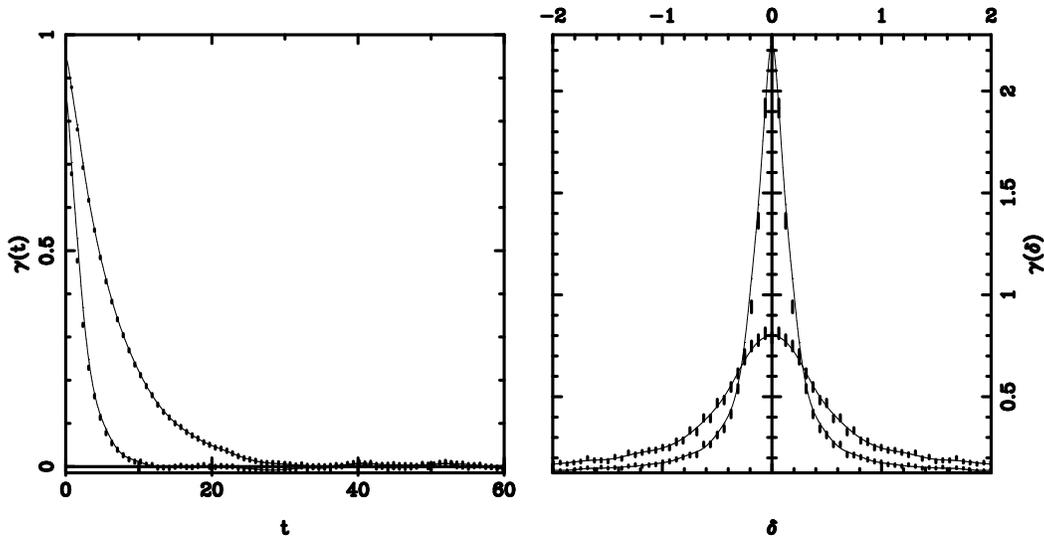


Figura 4.8: Funzione di correlazione e forma di riga per $g = 3, 7$.

Sfruttando la condizione di ergodicit  allo stato stazionario   possibile

inoltre calcolare la funzione di correlazione del campo

$$\gamma(t) \equiv \frac{\langle a^\dagger(t+t_s)a(t_s) \rangle}{\langle n(t_s) \rangle} = \frac{1}{\langle n(t_s) \rangle} \sum_{i=1}^N \alpha_i^*(t+t_s)\alpha_i(t_s), \quad (4.22)$$

che risulta reale data l'isotropia del processo di diffusione. La trasformata di Fourier della funzione di correlazione è la forma di riga o densità spettrale

$$\gamma(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\delta t} \gamma(t) dt, \quad (4.23)$$

in funzione del detuning δ in frequenza.

Nella fig. 4.8, sono riportati, per due distinti valori di g , i grafici della funzione di correlazione e dello spettro delle fluttuazioni.

Capitolo 5

Applicazione ad un modello di amplificatore ottico

5.1 Introduzione

In questo capitolo si prenderà in considerazione un'equazione di Fokker-Planck unidimensionale, derivabile dalla master-equation per un laser monomodale, per poi adattarla alla descrizione di un amplificatore ottico ad onda viaggiante in regime di saturazione. In particolare verranno presentate e analizzate le simulazioni del guadagno e della figura di rumore dell'amplificatore.

5.2 L'equazione di Fokker-Planck per un laser monomodale

L'equazione di Fokker-Planck a cui si fa riferimento è ottenibile da quella per la distribuzione di probabilità del numero di fotoni per un campo interagente

con atomi a due livelli iniettati in una cavità laser [11].

La master equation nelle componenti diagonali della matrice densità ha la forma:

$$C^{-1}\dot{p}_n = -(n+1) \left[\frac{\theta_2}{1+(n+1)R} + \bar{n} \right] p_n + n \left[\frac{\theta_2}{1+nR} + \bar{n} \right] p_{n-1} \quad (5.1)$$

$$+ (n+1) \left[\frac{\theta_1}{1+(n+1)R} + (\bar{n}+1) \right] p_{n+1} - n \left[\frac{\theta_1}{1+nR} + (\bar{n}+1) \right] p_n ,$$

dove $\theta_i = R_i/2C$ sono i parametri di 'pompaggio' (C è il damping della cavità e R_i il *rate* con cui gli atomi sono iniettati sul livello i -esimo), mentre R è la costante adimensionale

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{\gamma_1\gamma_2}{4g^2} , \quad (5.2)$$

dove γ_i sono le costanti di decadimento dei livelli atomici e g è la costante di accoppiamento campo/atomo. La quantità $n^* \equiv \frac{1}{R}$ rappresenta il numero di fotoni di saturazione.

Riscalando le variabili in modo da avere $\nu = \frac{n}{n^*}$, $\tau = tC$ e passando quindi al 'continuo' per $n^* \gg 1$, approssimiamo la master equation (5.1) nella forma di Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(\nu, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \nu} [Q(\nu)P(\nu, \tau)] + \frac{1}{2n^*} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} [D(\nu)P(\nu, \tau)] , \quad (5.3)$$

con coefficienti di drift e diffusione:

$$Q(\nu) = (\nu + n_*^{-1}) \left[\bar{n} + \theta_2(1 + \nu + n_*^{-1})^{-1} \right]$$

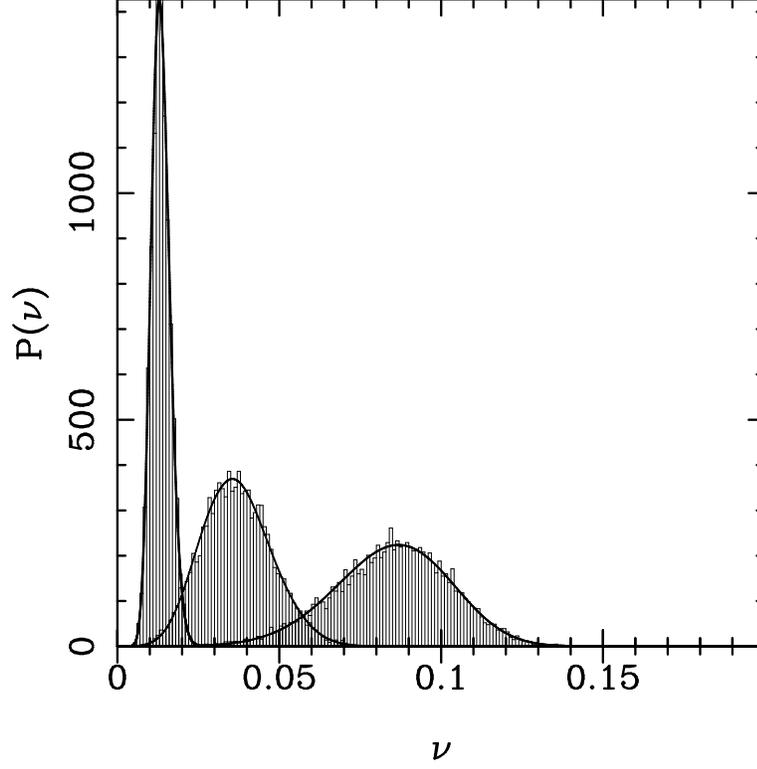


Figura 5.1: Rappresentazione in istogramma dell'evoluzione della $P(\nu)$ ai tempi $\tau = 2, 10, 20$, secondo l'eq. (5.3). Le curve a confronto sono ricavate dall'integrazione numerica diretta.

$$- \nu [1 + \bar{n} + \theta_1(1 + \nu)^{-1}] , \quad (5.4)$$

$$D(\nu) = \left\{ (\nu + n_*^{-1}) [\bar{n} + \theta_2(1 + \nu + n_*^{-1})^{-1}] + \nu [1 + \bar{n} + \theta_1(1 + \nu)^{-1}] \right\} , \quad (5.5)$$

In fig. 5.1 è riportato il grafico della distribuzione di probabilità $P(\nu; \tau)$

evoluto per tre tempi diversi, avendo usato i parametri fisici seguenti:

$$n_* = 10^4, \quad \theta_1 = 1.15, \quad \bar{n} = \theta_2 = 0. \quad (5.6)$$

In particolare, al tempo $\tau = 0$, il segnale è rappresentato da uno stato coerente con $\langle \hat{n} \rangle_0 \equiv \nu_0 n_* = 100$.

Per effettuare la simulazione è stato impiegato un ensemble statistico di dimensione 10^4 ; si noti come in tal caso si presenti il problema di diffusione oltre il dominio $\nu \geq 0$, ovviabile simulando riflessioni elastiche per i punti $\nu < 0$.

5.3 Amplificatore ad onda viaggiante

Come applicazione dell'eq. (5.3) ad un caso reale verrà ora considerato un amplificatore '*Travelling Wave Optical Amplifier*' (TWOA) laser a semiconduttore (GaAs) così come caratterizzato in [5],[12],[13].

Il laser ha una cavità con bassa riflettività ($\sim 10^{-4}$), il che consente di amplificare segnali dal comportamento molto vicino a un'onda viaggiante con una larghezza di riga molto grande (dell'ordine dei *THz* da confrontarsi con lunghezze di alcuni *GHz* raggiungibili con le ordinarie cavità Fabry-Perot).

Ora, dato l'interesse per l'utilizzo nelle trasmissioni in fibra ottica, risulta importante esaminare le prestazioni del TWOA in condizioni non lineari, ovvero quando un aumento della potenza ottica incidente P_{in} comporta un apprezzabile livello di saturazione.

A tale scopo è possibile, via simulazione numerica, ottenere l'andamento del guadagno e del rumore in funzione della potenza del segnale in ingresso P_{in} .

Il guadagno è definito dal rapporto tra le potenze in uscita e in ingresso

$$G = \frac{P_{out}}{P_{in}} \equiv \frac{\langle n \rangle_{out}}{\langle n \rangle_{in}}, \quad (5.7)$$

dove $\langle n \rangle$ indica il valor medio del numero di fotoni.

Al valore $\langle n \rangle_{out}$ corrisponde il numero effettivo di fotoni del segnale amplificato, avendo tenuto conto anche del contributo ineliminabile dovuto all'amplificazione dell'emissione spontanea (che va sottratta dal segnale in uscita).

Per una modulazione on-off ciò equivale a prendere

$$\langle n \rangle_{out} = \langle n \rangle_{on} - \langle n \rangle_{off}. \quad (5.8)$$

La figura di rumore è definita invece come segue

$$R = \frac{(S/R)_{in}}{(S/R)_{out}}, \quad (5.9)$$

dove il rapporto segnale/disturbo è $S/R = \langle n \rangle^2 / \langle \Delta n^2 \rangle$ e il rumore $\langle \Delta n^2 \rangle$ rappresenta le fluttuazioni del numero di fotoni e si calcola mediando sugli stati on-off considerati equiprobabili:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle \Delta n^2 \rangle_{on} + \langle \Delta n^2 \rangle_{off} \right). \quad (5.10)$$

L'evoluzione del segnale e del rumore attraverso l'amplificatore ottico è stata calcolata simulando l'equazione di Fokker-Planck (5.3) mediante il metodo Monte-Carlo.

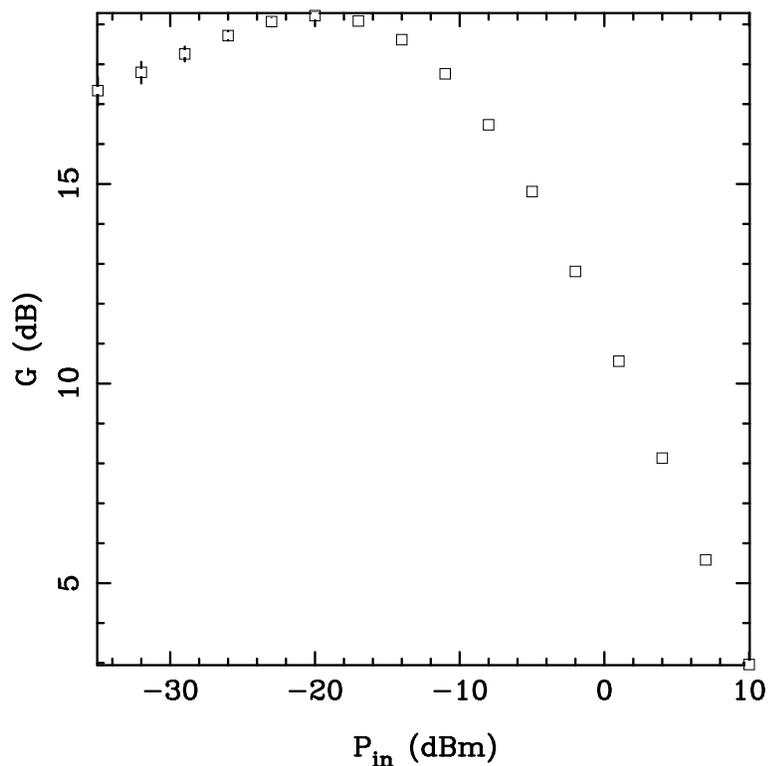


Figura 5.2: Guadagno in funzione di P_{in} del TWA [5]

Nelle figure 5.2, 5.3 sono riportati i risultati per il guadagno ed il rumore in funzione della potenza incidente ($P = h\nu\Delta\nu\langle n \rangle$, $\Delta\nu$ larghezza di banda dell'amplificatore), tenendo presenti i parametri del dispositivo dati in [5],

dai quali in particolare si ricava

$$n_* \simeq 10^4, \quad \theta_1 = 3.12, \quad \theta_2 = 0.9 .$$

I risultati ottenuti sono in accordo qualitativo con quelli riportati in Ref. [5], confermando il comportamento non lineare del TWA con un calo del guadagno (circa $3dB$ per $P_{in} \simeq 100\mu W = -10dBm$) accompagnato da un miglioramento della figura del rumore per effetto della saturazione (il

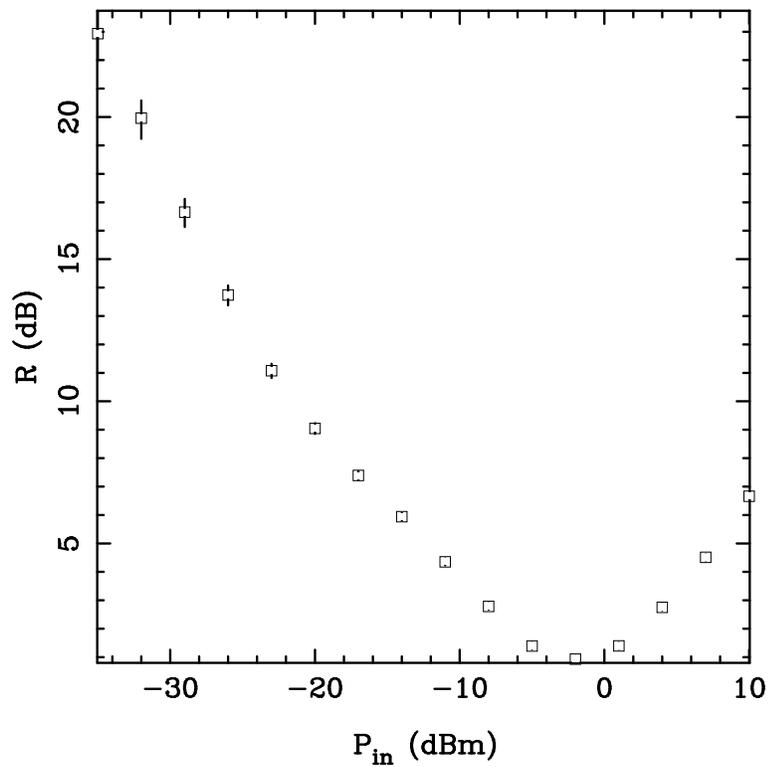


Figura 5.3: Figura di rumore in funzione di P_{in} per il TWA

minimo è alla potenza d'ingresso $P_{in} \simeq 0 = 1mW$).

Il minimo della figura di rumore è superiore al limite quantistico teorico $R \geq 1$, mentre in Ref. [5] si ottiene un valore non fisico inferiore a uno (dovuto alla non corretta considerazione dell'amplificazione dell'emissione spontanea).

Capitolo 6

Conclusioni

Risulta evidente dai risultati riportati nei precedenti capitoli che il metodo di simulazione Monte-Carlo qui presentato si presta in maniera efficace alla trattazione di sistemi ottici complessi, in particolare di modelli multidimensionali, per i quali i metodi statistici di integrazione diretta rendono proibitivo il calcolo delle quantità di interesse. Inoltre, la tecnica di simulazione dell'equazione di Fokker-Planck attraverso la funzione di Green rappresenta una concreta alternativa a quella per la master equation [1] che diviene impraticabile per regimi ad alto numero di fotoni. In particolare si è messo in rilievo il fatto che proprio le equazioni di Fokker-Planck per le funzioni di Wigner consentono di interpretare con maggior facilità la dinamica dei processi di diffusione probabilistica e si è enfatizzata (v. Cap.2) la possibilità di poter trasformare le master equation in equazioni di Fokker-Planck attraverso metodi generali.

Nella trattazione del modello Van Der Pol di laser alla soglia si è verificata l'alta affidabilità del metodo Monte-Carlo attraverso simulazioni dello stato stazionario, del valor medio $\langle n \rangle$ e del fattore di Fano $F \equiv \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$, ottenendo ottimo accordo con i risultati analitici.

Si è poi visto come il metodo di simulazione assuma particolare rilevanza investigativa nell'applicazione a modelli reali di sistemi ottici non lineari che richiedono una trattazione quantistica del rumore in presenza di saturazione. Nel caso del laser a semiconduttore TWA (*Travelling Wave Optical Amplifier*), con i parametri operazionali di Ref. [5], sono state presentate le simulazioni numeriche del guadagno e della figura di rumore dell'amplificatore.

I risultati delle simulazioni evidenziano bene le prestazioni dell'amplificatore ottico operante in un regime non lineare, mostrando come una riduzione del guadagno sia accompagnata da un notevole miglioramento del rapporto segnale/disturbo nel processo di amplificazione, all'aumentare della potenza incidente per un ampio range di valori. In pratica, operando con un apprezzabile parametro di saturazione, è possibile limitare il contributo quantistico al rumore del dispositivo, dovuto alle fluttuazioni del numero di fotoni per effetto dell'emissione spontanea. Ovviamente il guadagno ottenibile in regime di saturazione risulta minore rispetto al caso di amplificazione lineare, ed un valore ottimale si ottiene utilizzando una potenza di ingresso

$P_{IN} \approx 0dBm$ ($1mW$) corrispondente al valore minimo ($\approx 0dB$) per la figura di rumore. Messe a confronto con i risultati riportati in Ref. [5] le simulazioni del guadagno e della figura di rumore sono da considerarsi più che soddisfacenti.

Si è anzi ottenuto un miglior risultato per la figura di rumore rispetto a quello in [5], ove compare un minimo non fisico, a causa di un'insufficiente considerazione dell'emissione spontanea amplificata.

Bibliografia

- [1] C. W. Gardiner, A. S. Parkins, and P. Zoller, Phys. Rev. A **46** 4363 (1992)
- [2] L. A. Lugiato, F. Casagrande and L. Pizzuto, Phys. Rev. A **26** 3438 (1982)
- [3] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963)
- [4] H. Haken, *Light* vol. 2, pag 294 (North-Holland Physics Publishing 1985)
- [5] S. Ruiz-Moreno, J. Guitart, and M. J. Soneira in *Quantum Aspects of Optical Communications*, edito da C. Bendjaballah, O. Hirota and S. Reynaud, Lecture Notes in Physics **378** (Springer, Berlin, New York 1991), p. 376
- [6] H. J. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, pag.32, pag. 68 ULB Lectures in Nonlinear Optics (1991)
- [7] C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, (Springer, Berlin 1991)

- [8] S. E. Koonin and D. C. Meredith, *Computational Physics*, (Addison-Wesley, Redwood City, 1990)
- [9] H. Risken, *The Fokker-Planck equation*, (Springer-Verlag, Berlin 1989)
- [10] W. H. Louisell, *Quantum statistical properties of radiation*, Series in pure and applied optics (Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1973)
- [11] P. Meystre and M. Sargent III, *Elements of quantum optics*, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1991)
- [12] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello and S. Moroni, *Mod. Phys. Lett.* (in corso di stampa)
- [13] G. M. D'Ariano and C. Macchiavello, *SPIE proceedings* (in corso di stampa)