

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Il sistema</b>	<b>8</b>
2.1	Modello di Jaynes e Cummings e conseguenze . . . . .	8
2.2	Trattazione microscopico-quantistica . . . . .	15
2.3	Trattazione semiclassica per flussi atomici bassi . . . . .	21
2.4	Trattazione semiclassica per flussi atomici alti . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Risultati della descrizione semiclassica</b>	<b>39</b>
3.1	Introduzione . . . . .	39
3.2	Flussi bassi . . . . .	40
3.3	Flussi alti . . . . .	47
3.3.1	Analisi generale . . . . .	47
3.3.2	Analisi della dipendenza da $\Theta$ . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Descrizione microscopico-quantistica e similitudine termodinamica</b>	<b>66</b>

4.1	Introduzione . . . . .	66
4.2	Equazione di Fokker-Planck . . . . .	67
4.3	Stati stazionari e potenziale effettivo . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>78</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Il micromaser consiste in una cavità superconduttrice (ossia con alto fattore di merito  $Q$ ) nella quale viene iniettato un fascio monoenergetico di atomi a due livelli nello stato eccitato ed in risonanza con il modo fondamentale della cavità stessa.

L'aggettivo 'micro' è relativo al fatto che la cavità viene attraversata da flussi di atomi talmente bassi da permettere l'osservazione dell'interazione del singolo atomo con la radiazione. È proprio questa peculiarità a rendere il sistema attraente come oggetto di indagine: solo arrivando ad un tale livello di semplificazione del problema è possibile vedere effetti quantistici che di solito vengono mascherati dalle fluttuazioni di altri gradi di libertà del campo.

Jaynes e Cummings nel 1963 [1] hanno fornito la descrizione quantistica non perturbativa dell'interazione atomo-radiazione e successivamente sono stati previsti una serie di fenomeni che recentemente hanno avuto riscon-

tro sperimentale. Ad esempio Rempe et al. [2] hanno osservato l'esistenza dei cosiddetti *collapse and revival* delle oscillazioni del campo in cavità, ed hanno verificato che la statistica dei fotoni può divenire subpoissoniana, a testimonianza della natura quantistica della radiazione generata nel micromaser.

Un notevole impulso agli studi sperimentali è stato dato dalla possibilità di diminuire quasi a piacimento le perdite della cavità [3] ed anche dalla disponibilità di 'atomi di Rydberg', che hanno costanti di accoppiamento di dipolo elettrico enormi rispetto alla norma. E tuttavia non è ancora stato possibile realizzare i cosiddetti 'stati trappola'[4], autostati del numero di fotoni che si instaurano in cavità, a causa della dipendenza critica dalla collimazione della velocità degli atomi.

Numerosi lavori teorici sono stati pubblicati sull'argomento: fondamentale è l'articolo di Filipowicz et al.[5], nel quale viene proposto un modello quantistico microscopico del sistema. La peculiarità della trattazione sta nel modo di tenere in considerazione le perdite della cavità: facendo l'ipotesi che siano trascurabili durante il transito dell'atomo, e che la spaziatura temporale tra due atomi iniettati successivamente segua una distribuzione poissoniana, si ottiene una *master equation* da cui si arriva ad una previsione di statistica subpoissoniana per gli stati stazionari del campo. La distribuzione di probabilità dei fotoni è quindi trattata in una analogia termodinamica mediante un 'potenziale effettivo'.

Altro studio imprescindibile è la trattazione semiclassica di Meystre e Wright. Nel lavoro [6] viene fatta l'ipotesi di iniezione regolare degli atomi, e si assume come nel [5], che sia possibile trascurare il decadimento dei fotoni durante il transito del singolo atomo. Risultato notevole dell'indagine è la previsione di una dinamica caotica per il campo.

In questo lavoro di tesi alcune delle ipotesi ed approssimazioni viste sono superate. Nell'ambito di una trattazione semiclassica esatta viene proposta l'estensione del modello al caso che:

- i)* almeno un atomo alla volta sia presente in cavità;
- ii)* l'interazione atomo-radiazione venga trattata contestualmente alle perdite della cavità;
- iii)* gli atomi siano iniettati in cavità in modo regolare.

Il punto *i)* è particolarmente rilevante se si considera che tutti i casi precedentemente trattati in letteratura si riferiscono a flussi atomici estremamente bassi, con numero  $N$  di atomi mediamente presenti in cavità molto minore di 1 (cavità quasi sempre vuota). Il punto *ii)* è necessario per trattare flussi alti ( $N \geq 1$ ). Per quanto riguarda infine l'ultimo punto *iii)*, si deve considerare che l'iniezione poissoniana adottata nella letteratura citata è anche un espediente di calcolo per valutare la dinamica del sistema per flussi molto bassi ( $N \ll 1$ ).

Nel caso  $N = 1$ , il presente lavoro conferma le previsioni fatte per flussi più bassi, e mostra che la dinamica caotica del campo in cavità presenta alcuni aspetti peculiari (meccanismi di biforcazione e ‘onset del caos’) simili a quelli previsti per  $N \ll 1$ , ma anche comportamenti nuovi completamente inaspettati. Il fatto di considerare  $N \geq 1$ , invece, permette di vedere effetti cooperativi nel tempo che, pur all’interno di una notevole instabilità del sistema, sono all’origine di fenomeni di auto-organizzazione del campo. Ad esempio, per  $N = 1$  ed  $N = 2$ , si giunge all’osservazione di una transizione di fase per il campo che non era stata prevista nel caso che gli atomi stessero poco in cavità. Il sistema a più atomi è multistabile, e di questo si trova traccia sia nello studio della evoluzione dinamica del campo, che nello studio del modo in cui la radiazione si avvicina al caos od effettua le transizioni di fase.

Il Cap. 2 di questa tesi contiene una panoramica dei risultati sperimentali più rilevanti presenti in letteratura e la loro interpretazione quantistica. Vengono poi illustrati il modello quantistico microscopico del micromaser di Filipowicz et al. [5], quello semiclassico per flussi atomici bassi di Meystre e Wright [6] e quello semiclassico per molti atomi [7] che rappresenta il contributo originale di questo lavoro di tesi. Il Cap. 3 è dedicato alla esposizione dei risultati dei due modelli semiclassici, con particolare rilievo per l’analisi della dinamica multistabile e con un rapido accenno al confronto con lo schema quantistico. Nel Cap. 4 è illustrato—nell’ambito della teoria di Filipowicz et

al.—un metodo per lo studio del maser a bassi flussi che utilizza la equazione di Fokker-Planck ed un potenziale del tipo di quello di Landau-Ginzburg. Il Cap. ?? conclude la tesi con una discussione comparativa dei risultati.

# Capitolo 2

## Il sistema

### 2.1 Modello di Jaynes e Cummings e conseguenze

Il problema dello studio non perturbativo dell'interazione tra un singolo atomo a due livelli ed un singolo modo di radiazione non può essere affrontato con l'usuale teoria di Weisskopf e Wigner [8], poiché quest'ultima presuppone l'esistenza di un bagno di radiazione con banda molto larga. La più immediata conseguenza di questo fatto è il contrasto tra la legge di decadimento esponenziale della popolazione del livello eccitato che risulta dall'approccio di Weisskopf e Wigner e la previsione del quantum collapse and revival fatta invece partendo dal modello di Jaynes e Cummings (??).

Si consideri la Hamiltoniana che descrive la dinamica dell'atomo risonante col modo della cavità, in approssimazione di dipolo elettrico e di onda rotante

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega\hat{\sigma}_z}{2} + \hbar\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar(g\hat{a}\hat{\sigma}_+ + h.c.). \quad (2.1)$$



Qui  $\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+$  e  $\hat{\sigma}_-$  sono gli operatori di spin di Pauli,  $\hat{a}^\dagger$  ed  $\hat{a}$  gli operatori di creazione e distruzione del campo,  $g$  la costante di accoppiamento di dipolo elettrico ed  $\omega$  la frequenza comune ad atomo e campo.

L'energia di interazione accoppia solo stati  $|e, n\rangle$  con stati  $|f, n+1\rangle$ , dove  $|e\rangle$  ed  $|f\rangle$  sono il livello eccitato e quello fondamentale dell'atomo ed  $|n\rangle$  è l'autostato del numero di fotoni. I sottospazi  $\mathcal{S}_n = \{|e, n\rangle, |f, n+1\rangle\}$  sono disaccoppiati e si possono trattare separatamente. Il calcolo degli autovettori  $|1, n\rangle$  e  $|2, n\rangle$  del sistema è semplice: essi sono rispettivamente le combinazioni lineari simmetrica ed antisimmetrica di  $|e, n\rangle$  ed  $|f, n+1\rangle$ . Scrivendo l'equazione per l'evoluzione di Schroedinger della funzione d'onda

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i(\hat{H}/\hbar)t}|\Psi(0)\rangle, \quad (2.2)$$

si possono facilmente ricavare le equazioni per le ampiezze di probabilità degli autostati del sistema, e da queste risalire alle equazioni per le probabilità degli stati  $|e, n\rangle$  ed  $|f, n+1\rangle$ . In particolare per un atomo inizialmente sul livello eccitato si ottiene

$$P_{e,n} = \cos^2(g\sqrt{n+1}t), \quad (2.3)$$

$$P_{f,n+1} = \sin^2(g\sqrt{n+1}t). \quad (2.4)$$

Le Eqs. (??) mostrano una oscillazione con frequenza di Rabi  $g\sqrt{n+1} = \Omega_n$  tra il livello fondamentale e l'eccitato all'interno di un dato sottospazio  $\mathcal{S}_n$ .

La probabilità che il singolo atomo sia ancora eccitato indipendentemente

dallo stato del campo è

$$P_e = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P_{e,n} . \quad (2.5)$$

In particolare, se si considera un campo inizialmente nello stato coerente  $|\alpha\rangle$ , si ha

$$P_e = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} \cos^2(g\sqrt{n+1}t)}{n!} . \quad (2.6)$$

La (2.6) è rappresentata in Fig. (2.1) [3]. È evidente che le oscillazioni della  $P_e$  subiscono un collasso (*collapse*) [9, 10, 11, 12, 13] causato dalla reciproca interferenza delle frequenze di Rabi  $g\sqrt{n+1}$ . Mentre questo sfasamento potrebbe verificarsi anche per spettri continui di energia, la ripresa (*revival*) [14] delle oscillazioni è il contrassegno della natura granulare del campo, perché si verifica quando tutti i contributi nella (2.5) rifasano [3]. Il quantum collapse and revival si verifica anche se  $p_n$  è termica

$$P_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n \cos^2(g\sqrt{n+1}t)}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}} , \quad (2.7)$$

a dispetto del fatto che un campo termico è considerato il prototipo del rumore che distrugge la coerenza che si manifesta nella oscillazione di Rabi.

Una prova sperimentale di quanto detto è stata data da Rempe, Walther e Klein [2] che hanno fatto misure proprio sulla  $P_e$  monitorando la percentuale degli atomi che uscivano ancora eccitati dalla cavità. Partendo dal caso illustrato dalla (2.7), per temperature dell'ordine dei 2 K e flussi atomici molto bassi, al variare del tempo di interazione atomo-campo il sistema rilassa

verso uno stato stazionario termico che corrisponde alla temperatura delle pareti della cavità. Aumentando il flusso si genera un campo non coerente in cavità e si ottiene un revival analogo a quello per stati coerenti. I revival sono dunque una proprietà generale dei campi quantizzati.

In un altro esperimento effettuato recentemente [15], utilizzando un fascio altamente collimato di atomi di Rubidio eccitati al livello  $63p_{3/2}$ , è stata investigata la statistica subpoissoniana dei fotoni in cavità. Le due transizioni maser considerate sono la  $63^2p_{3/2} \rightarrow 61^2d_{3/2}$  e la  $63^2p_{3/2} \rightarrow 61^2d_{5/2}$ . Con misure ripetute del numero di atomi che escono diseccitati dalla cavità, se ne ricava la distribuzione di probabilità. Una misura del carattere poissoniano (classico) o subpoissoniano (quantistico) della distribuzione di probabilità è data dal parametro di Mandel

$$Q_a = \frac{(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2) - \langle N \rangle}{\langle N \rangle} . \quad (2.8)$$

Il parametro  $Q_a$ , dove la  $a$  sta per atomica, è legato al rispettivo  $Q_f$ —fotonico—attraverso la relazione

$$Q_a = \epsilon P Q_f (2 + Q_f) , \quad (2.9)$$

dove  $\epsilon$  è l'efficienza della rivelazione degli atomi e  $P_f$  è la probabilità di trovare il singolo atomo nel livello maser inferiore

$$P_f = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P_{f,n+1} , \quad (2.10)$$

(si veda la [16] per la derivazione della (2.9)). Un  $Q_a$  negativo, dunque, denota una statistica subpoissoniana dei fotoni in cavità.

La Fig. (2.2) [15] mostra i risultati dell'esperimento: è stata testata la presenza di radiazione non classica in corrispondenza di entrambe le transizioni maser. Il meccanismo attraverso cui questa situazione viene raggiunta può essere interpretato così: ogni deviazione del numero di fotoni dal proprio valor medio viene bilanciato da un corrispondente cambiamento nella probabilità di emissione degli atomi (cambia la frequenza di Rabi  $g\sqrt{n+1}$ ). Questo effetto porta ad una naturale stabilizzazione dell'intensità del maser per mezzo di un processo di retroazione incorporato nella dinamica atomi-campo.

Dunque anche in assenza di dissipazione sussiste un controllo della crescita del numero dei fotoni: aumentando  $\Omega_n$  l'atomo si trova nella condizione di poter riassorbire un fotone, uscendo eccitato dalla cavità. Per ogni numero di fotoni ciò si può ottenere aggiustando nella maniera adeguata la velocità degli atomi. E qui è d'obbligo un riferimento ad alcune delle difficoltà che sono state superate dagli sperimentatori per la esecuzione di tutte queste prove [2]. Innanzitutto, come detto, il tempo di interazione tra gli atomi ed il campo (che varia di solito tra i 10 ed i  $170\mu s$ ) deve essere fissato con una certa precisione: a questo scopo viene utilizzato un selettore di velocità di Fizeau. Si possono così ottenere distribuzioni della velocità con larghezza del 4%. In Fig.F6.3DELL'1 è mostrato schematicamente il micromaser utilizzato di solito negli esperimenti [3]. Il secondo problema sperimentale è quello di ridurre le perdite della cavità. Facendo uso di cavità superconduttrici mantenute a dell'ordine di pochi gradi Kelvin, si arriva a fattori di merito

$Q$  che oscillano tra  $10^7$  e  $10^{11}$  e portano a tempi di vita  $\tau_f$  di un fotone in cavità che vanno dai  $500\mu\text{s}$  agli  $0.2$  s. Tutto questo in corrispondenza di un modo di radiazione a frequenza  $\nu$  di  $21\text{GHz}$  come si ha dalla relazione

$$\frac{1}{\tau_f} = \frac{\omega}{Q} = \frac{2\pi\nu}{Q} . \quad (2.11)$$

Il terzo punto della analisi riguarda gli atomi iniettati in cavità. Frequenze nel dominio delle microonde corrispondenti a transizioni elettroniche si ottengono per livelli adiacenti con alto numero quantico principale effettivo  $n^*$ . Infatti la lunghezza d'onda di transizione tra stati adiacenti di una serie di Rydberg è:

$$\lambda_{n,n\pm 1} \sim \frac{hc(n^*)^3}{2R_M} , \quad (2.12)$$

che sta nel dominio dei cm per  $n^* \sim 60$ . Risuonatori di queste dimensioni possono essere costruiti con grande precisione. Con il termine ‘atomi di Rydberg’ si denotano in effetti sia atomi che molecole in stati altamente eccitati ad un elettrone.

Un ulteriore vantaggio offerto dall'elevato numero quantico effettivo è quello di implicare costanti di accoppiamento di dipolo elettrico molto grandi. Infatti l'elemento di matrice  $d_{n,n\pm 1}$  tra livelli di Rydberg adiacenti è

$$d_{n,n\pm 1} \sim ea_0(n^*)^2 , \quad (2.13)$$

che porta a fattori  $g$  che vanno ad esempio dai  $10$  KHz per la transizione  $63^2p_{3/2} \longrightarrow 61^2d_{3/2}$  ai  $44\text{KHz}$  per la  $63^2p_{3/2} \longrightarrow 61^2d_{5/2}$ .

La facilità nello ionizzare questi atomi rende anche la loro rivelazione molto agevole. Infatti, dopo essere usciti dalla cavità, essi passano attraverso due rivelatori [17] nel primo dei quali il campo è preparato in modo da ionizzare solo gli atomi eccitati. Moltiplicatori di elettroni secondari permettono a questo punto di vedere un frammento elettronico od ionico con una efficienza del 90%. In aggiunta a ciò, la dipendenza della soglia di ionizzazione da  $n^*$  permette di individuare selettivamente le eccitazioni atomiche ionizzate.

Malgrado tutti questi progressi sperimentali non è stato però ancora possibile verificare un'altra delle previsioni che si ricavano dal modello di Jaynes e Cummings: quello della creazione di stati numero in cavità. Uno degli ostacoli principali è la difficoltà di prevedere e poi misurare quale particolare  $|n\rangle$  si realizzi effettivamente. La spiegazione teorica del fenomeno è però molto semplice [4]. Si consideri la (2.4): i suoi zeri implicano la esistenza di stati numero  $|n_q\rangle$  per cui gli atomi sperimentano rotazioni di Rabi multiple intere di  $2q\pi$  durante il tempo di interazione col campo  $\tau_{int}$  (il vettore di Bloch dell'atomo fa un numero intero  $q$  di giri completi). Ciò significa che la distribuzione  $p_n$  tenderà a piccarsi sempre più su un certo valore di  $n$  (quello per cui  $g\sqrt{n_q + 1}\tau_{int} = q\pi$ ) sino a che l'emissione di fotoni verrà inibita e si sarà creato uno stato di Fock puro in cavità. Questi 'stati trappola' sono il risultato dell'interazione coerente tra gli atomi ed il campo e tendono a bloccare la crescita di quest'ultimo oltre ad un certo  $|n_q\rangle$ . In competizione con questo processo c'è però quello dissipativo: le fluttuazioni termiche trasferiscono

popolazione sia verso l'alto ( $n \longrightarrow n + 1$ ) che verso il basso ( $n \longrightarrow n - 1$ ), permettendo al micromaser di passare oltre ad un certo stato trappola.

Per avere una corretta visione della realtà è dunque d'obbligo la considerazione delle perdite della cavità. Nella sezione 2.2 sarà esposto il modo generalmente adottato per trattare le perdite.

## 2.2 Trattazione microscopico-quantistica

Volendo fare una trattazione microscopica strettamente quantistica del micromaser, si rende necessaria un'approssimazione abbastanza stringente: che gli atomi—inizialmente tutti eccitati—transitino talmente velocemente in cavità da poter trascurare la dissipazione durante il tempo di interazione, ossia  $\tau_{int} \ll \gamma^{-1}$ ,  $\gamma^{-1}$  essendo il tempo di vita di un fotone in cavità. Ne consegue che si possono in tal modo trattare solo flussi talmente bassi da avere al massimo un atomo alla volta interagente con la radiazione in cavità.

In questo modo, se  $\hat{\rho}_c$  è la matrice delle variabili di campo, la sua evoluzione può essere divisa in due fasi [5]. La prima fase va dall'ingresso all'uscita dell'atomo dalla cavità ed è descritta dalla Hamiltoniana di Jaynes e Cummings (2.1): se  $U(t)$  è l'operatore di evoluzione temporale e  $t_i$  è il momento dell'ingresso dell'atomo  $i$ -esimo, l'operatore densità ridotto della radiazione  $\hat{\rho}_c$  sarà

$$\hat{\rho}_c(t_i + \tau_{int}) = Tr_a[\hat{U}(\tau_{int})\rho(\hat{t}_i)\hat{U}^\dagger(t_i)] = \hat{F}(\tau_{int})\hat{\rho}_c(t_i), \quad (2.14)$$

dove  $\tau_{int}$  è il tempo di interazione atomo-radiazione (tempo di permanenza

dell'atomo in cavità),  $Tr_a$  sta per traccia sulle variabili atomiche e  $\hat{\rho}$  denota la matrice densità atomo-radiazione.

La seconda fase è quella dell'intervallo tra  $(t_i + \tau_{int})$  e  $t_{i+1}$ , in cui il campo decade con rapidità  $\gamma$  verso uno stato stazionario termico con un numero medio di fotoni  $n_b$  che dipende dalla temperatura, come descritto dalla master equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_c}{\partial t} \equiv \hat{L} \hat{\rho}_c = & \frac{\gamma}{2} (n_b + 1) [2\hat{a}\hat{\rho}_c\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_c - \hat{\rho}_c\hat{a}^\dagger\hat{a}] \\ & + \frac{\gamma}{2} n_b [2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_c\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_c - \hat{\rho}_c\hat{a}\hat{a}^\dagger] . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dunque la matrice al tempo  $t_{i+1}$  è descritta da una relazione di ricorrenza della forma

$$\hat{\rho}_c(t_{i+1}) = e^{Lt_p} [F(\tau_{int})\hat{\rho}_c(t_i)] , \quad (2.16)$$

dove  $t_p = t_{i+1} - t_i - \tau_{int} \simeq t_{i+1} - t_i$  è il tempo che intercorre tra l'uscita dell'atomo  $i$ -esimo e l'ingresso del successivo  $(i+1)$ -esimo.

Al fine di rendere la (2.16) più maneggevole si fa ora una ipotesi: che gli atomi siano iniettati in cavità con una statistica poissoniana con spaziatura media  $\tau_0 = 1/R$  tra due eventi ( $R$  è il flusso atomico). Mediando la (2.16) sulla distribuzione esponenziale  $P(t_p) = Re^{-Rt_p}$  si ottiene

$$\bar{\rho}_c(t_{i+1}) = \frac{1}{(1 - L/R)} F(\tau_{int}) \bar{\rho}_c(t_i) , \quad (2.17)$$

e volendo esprimere il tutto nella forma di una master equation si ha

$$\frac{\partial \bar{\rho}_c}{\partial t} = L\bar{\rho}_c + R[F(\tau_{int}) - I]\bar{\rho}_c . \quad (2.18)$$



Si noti che l'ipotesi di statistica poissoniana rispecchia in modo piuttosto fedele la difficoltà di creare un fascio in cui gli atomi siano equispaziati.

A questo punto si supponga che la  $\hat{\rho}_c$  sia inizialmente diagonale nella rappresentazione degli stati numero e che atomi senza coerenza iniziale siano iniettati nel risuonatore. Dalla struttura del Liouvilliano in Eq. (2.15) e dall'operazione di traccia in Eq. (2.14) si vede che la  $\hat{\rho}_c$  rimane diagonale sia durante la interazione che durante il decadimento e la (2.16) può essere riscritta per  $p_n$ , con  $\langle n|\hat{\rho}_c|m\rangle = p_n\delta_{n,m}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}_n}{\partial t} &= \gamma(n_b + 1)[(n + 1)\bar{p}_{n+1} - n\bar{p}_n] \\ &+ \gamma n_b[n\bar{p}_{n-1} - (n + 1)\bar{p}_n] \\ &+ \gamma N_{ex}(\beta_n \bar{p}_{n-1} - \beta_{n+1} \bar{p}_n),\end{aligned}\tag{2.19}$$

dove  $N_{ex} = (R/\gamma)$ ,  $\Theta = g\tau_{int}\sqrt{N_{ex}}$ ,  $\beta_n = \sin^2(\Theta\sqrt{n/N_{ex}})$ .

$N_{ex}$  rappresenta il numero di atomi eccitati che transitano in cavità nel tempo di vita di un fotone,  $\Theta$  è il parametro di pompa.

Dalla (2.19) si può ricavare l'equazione per lo stato stazionario del campo:

$$\bar{p}_n = C \left[ \frac{n_b}{n_b + 1} \right]^n \prod_{k=1}^n \left[ 1 + \frac{N_{ex} \beta_k}{n_b k} \right],\tag{2.20}$$

C essendo una costante di normalizzazione. Mediante  $\bar{p}_n$  si calcola il numero medio di fotoni in cavità

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n.\tag{2.21}$$

In Fig. (2.4) è riportato il numero di fotoni  $\langle n \rangle$  scalato con  $N_{ex}$  [5]. La deviazione standard normalizzata

$$\sigma_n \equiv \frac{(\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2)^{1/2}}{\langle n \rangle^{1/2}}, \quad (2.22)$$

è riportata in funzione di  $\Theta$  in Fig. (2.5) [3]. Si può notare innanzitutto che, oltre alla soglia usuale del maser per  $\Theta = 1$ , il micromaser presenta successive soglie a  $\Theta = 2n\pi$ , che diventano più piccate al crescere di  $N_{ex}$ . Nel limite  $N_{ex} \rightarrow \infty$ , ciò porta ad una interpretazione della prima soglia come transizione di fase continua, mentre le altre sono più simili a transizioni di fase del primo ordine. È stato dimostrato [5] che aggiungendo un grado sufficiente di stocasticità alla trattazione (ad esempio randomizzando  $\tau_{int}$ ) si tendono ad appiattare le soglie successive alla prima e si ottiene una statistica poissoniana dei fotoni, trovando quindi i risultati del maser/laser ordinario. Il carattere granulare quanto-meccanico delle fasi coinvolte nella dinamica coerente atomi-campo viene mediato via se la variazione percentuale  $\delta\tau/\tau_{int}$  diventa abbastanza grande.

Dalla Fig. (2.5) emerge una statistica subpoissoniana per il campo. È infatti evidente che, in corrispondenza delle soglie successive alla prima,  $\sigma_n$  ha dei picchi positivi ( $\sigma_n \simeq 2 \div 5$ ) mentre tra questi si ha una varianza tipicamente dell'ordine di 0.5, segno della natura non classica della radiazione ( $\sigma = 1$  corrisponde a radiazione poissoniana).

La Fig. (2.6) (presa dalla Ref.[18]) mostra il significato dell'instaurarsi di uno stato trappola nel caso di cavità non dissipativa. Come già detto, ciò

avviene se si ha annullamento di un coefficiente  $\beta_n$  in corrispondenza di un numero di fotoni  $n$  tale che

$$g\tau_{int}\sqrt{n} = q\pi , \quad (2.23)$$

con  $q$  intero. Partendo da una distribuzione poissoniana con  $\langle n \rangle = 8$ , prendendo un  $\tau_{int}$  tale che  $g\tau_{int} = 2\pi/\sqrt{199}$  (e dunque  $\beta_n = 0$ ) si giunge, nel limite di temperature molto basse ( $T \rightarrow -\infty$ ) ad un collasso del sistema verso lo stato numero  $|198\rangle$ . Si noti che la coda poissoniana sul valore 199 porterebbe comunque il campo verso valori maggiori del numero di fotoni  $n = 198$ , ma poichè la probabilità iniziale è estremamente bassa ciò avverrebbe per tempi molto lunghi. Infatti, anche nel caso di cavità perfetta, se gli atomi sono iniettati nello stato eccitato, la radiazione tende a crescere ‘ad infinitum’ per tempi lunghi a causa delle fluttuazioni quantistiche e della non perfetta collimazione degli atomi, che impedisce l’esistenza di impulsi  $q\pi$  esatti: si veda la sezione (2.3) per una spiegazione più estesa. Comunque il meccanismo di intrappolamento è l’unico metodo noto attualmente per ridurre a zero le fluttuazioni del numero, permettendo il formarsi di uno stato puro. Nel caso dissipativo viene comunque raggiunto uno stato stazionario [19]—ma con fluttuazioni—, a seguito del bilanciamento fra le perdite e le fluttuazioni quantistiche; in tal caso lo stato stazionario è sempre indipendente dalle condizioni iniziali (qui per stato stazionario si intende quello per tempi maggiori di ogni scala temporale del problema). Il modello per il micromaser che è appena stato descritto viene chiamato comunemente ‘microscopico’, perché

segue passo passo l'evoluzione del campo, enfatizzando la natura granulare della sua interazione con l'atomo. Gli stessi risultati si possono però ottenere [20]—nel limite di pompa e perdite di cavità deboli—mediante un approccio ‘macroscopico’ del tipo di quello applicato nella teoria standard del laser, nella quale si parte da una equazione del tipo

$$\frac{\partial \hat{\rho}_c(t)}{\partial t} \equiv \frac{\hat{\rho}_c(t + \Delta t) - \hat{\rho}_c(t)}{\Delta t} = R\delta\hat{\rho}_{c,\tau_{int}}(t) + L\hat{\rho}_c(t). \quad (2.24)$$

Qui il primo termine al terzo membro descrive il guadagno, il secondo le perdite e si fa la ipotesi che il campo subisca interagendo con  $R$  atomi una variazione  $R$  volte quella  $\delta\hat{\rho}_{c,\tau_{int}}(t)$  dovuta all'interazione con un atomo singolo. Questa assunzione è valida nel caso che gli atomi si possano considerare scorrelati, dunque anche se la loro statistica di iniezione è poissoniana. In effetti anche per passare dalla (2.16) alla (2.17) si fa la medesima ipotesi.

Lo studio tramite la master equation degli stati stazionari del micromaser con le approssimazioni viste porta dunque alla luce quegli effetti—natura subpoissoniana della radiazione e stati trappola—che sono chiara testimonianza della natura quantistica del campo elettromagnetico. Inoltre rivela la possibilità di nuove soglie che sono dovute proprio all'interazione tra un solo modo della radiazione ed un atomo a due livelli.

Un approccio al problema tramite equazione di Fokker-Planck sarà presentato nel Cap. 4 di questa tesi.

## 2.3 Trattazione semiclassica per flussi atomici bassi

Le ipotesi di flussi atomici bassi e di perdite trascurabili durante la interazione atomi-campo sono il punto di partenza anche dell'analisi semiclassica di Meystre e Wright [6].

Nel caso conservativo, la (2.1) conduce alle equazioni di Heisenberg nello schema di interazione

$$\frac{d\hat{\sigma}_-}{dt} = ig\hat{a}\hat{\sigma}_z, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_z}{dt} = 2ig(\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{\sigma}_+), \quad (2.26)$$

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -ig\hat{\sigma}_-. \quad (2.27)$$

Nella presente trattazione l'approssimazione semiclassica non può essere ottenuta semplicemente come limite per  $\hbar \rightarrow 0$ , per il semplice fatto che gli operatori sono già scalati rispetto ad  $\hbar$ . Il limite semiclassico corrisponde in ogni caso a prendere i valori di aspettazione degli operatori considerati commutanti ed inoltre a fattorizzarne le medie. Sostituendo agli operatori i rispettivi valori di aspettazione (qui denotati senza cappuccio) si ha

$$\frac{d\sigma_-}{dt} = iga\sigma_z, \quad (2.28)$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = 2ig(\sigma_-a^* - a\sigma_+), \quad (2.29)$$

$$\frac{da}{dt} = -ig\sigma_-, \quad (2.30)$$

Supponendo che il campo classico si accoppi solo con la componente in

quadratura della polarizzazione è conveniente introdurre cambiamento di variabili

$$i(\sigma_+ - \sigma_-) = S \sin \Theta \quad \sigma_z = S \cos \Theta . \quad (2.31)$$

La (2.31) descrive le componenti non nulle del vettore di Bloch dell'atomo; conviene mantenere  $S$  come variabile reale con segno anche negativo. Gli atomi vengono iniettati in cavità tutti eccitati e senza iniziale momento di dipolo, vale a dire  $\Theta = 0$ . Utilizzando la conservazione di  $S$  si possono riscrivere il tempo e la ampiezza del campo

$$t' = gt\sqrt{S} , \quad (2.32)$$

$$\mathcal{E} = \frac{2a}{\sqrt{S}} , \quad (2.33)$$

ed in questi termini le (2.28) e (2.30) si riducono alle equazioni 'di pendolo'

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t'} = \mathcal{E} , \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t'} = \eta \sin \Theta , \quad (2.35)$$

con  $\eta = \text{sign}(S)$ , ossia  $\eta$  rende conto della eventuale inversione di popolazione dell'atomo in questione. Se  $\mathcal{E}_n$  denota il campo prima dell'iniezione dell'atomo ( $n + 1$ )-esimo si ottiene, integrando le (2.34) e (2.35) su un  $\tau'_{int}$ , una relazione di ricorrenza per  $\mathcal{E}_{n+1}$  della forma

$$\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{F}(\mathcal{E}_n) . \quad (2.36)$$

Si noti che sino ad ora la perdita della cavità è stata trascurata; si può dunque inserire la relazione di conservazione della energia

$$\frac{\dot{\Theta}^2}{2} + \eta \cos \Theta = \frac{\mathcal{E}_n^2}{2} + \eta, \quad (2.37)$$

nella (2.35) e poi integrare

$$\int_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{F}(\mathcal{E}_n)} d\mathcal{E} [1 - (\frac{\mathcal{E}_n^2 - \mathcal{E}^2}{2} + \eta)^2]^{-1/2} = \eta \tau'_{int}. \quad (2.38)$$

La (2.38) è una espressione implicita della (2.36). Più semplicemente, se si vuole avere una equazione che renda conto in maniera immediata della dinamica del campo, si può utilizzare la (2.37) imponendo che il campo sia abbastanza grande (variazioni relative piccole) da poter scrivere

$$\mathcal{E}_n + \mathcal{E}_{n+1} \simeq \mathcal{E}_n, \quad (2.39)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_n^2 \simeq \mathcal{E}_n^2, \quad (2.40)$$

dove  $\bar{\mathcal{E}}_n$  è la media di  $\mathcal{E}$  sul ciclo tra  $t'_n$  e  $t'_{n+1}$ . Omettendo il segno di media si ottiene infine

$$\mathcal{E}_{n+1} \simeq \mathcal{E}_n + (2\eta/\mathcal{E}_n) \sin^2(\mathcal{E}_n t'_{int}/2). \quad (2.41)$$

La Fig. (2.7) mostra  $\mathcal{F}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{E}_{n+1}$  nel caso di atomi inizialmente invertiti ( $\eta > 0$ ) e per  $\tau'_{int} = 5$ . Siccome per  $\eta > 0$  si verifica che  $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \geq \mathcal{E}$ , e le oscillazioni diminuiscono in ampiezza se cresce  $\mathcal{E}$  (si veda la (2.41)), successive iterazioni della mappa convergono sempre verso uno degli infiniti punti fissi  $0 = \mathcal{E}_0^* \leq \mathcal{E}_1^* \leq \dots \leq \mathcal{E}_j^* \leq \dots$  dati dalle soluzioni di  $\mathcal{E}^* = \mathcal{F}(\mathcal{E}^*)$ .

Il punto fisso  $\mathcal{E}_q^*$  corrisponde ad una interazione tra campo ed atomo, tale che il vettore di Bloch subisce una rotazione di  $2q\pi$ , lasciando il sistema immutato quando l'atomo esce dalla cavità. A questo proposito si noti l'analogia con gli stati trappola, dovuti anch'essi alla natura non lineare della interazione atomi-campo, la quale impedisce la crescita illimitata del campo anche in assenza di smorzamento (si veda a pag. 14).

Altra caratteristica della mappa  $\mathcal{F}(\mathcal{E})$  è di non essere invertibile, il che implica l'esistenza di bacini di attrazione dei vari punti fissi molto intrecciati tra loro e dunque una forte dipendenza dell'evoluzione del campo dalle condizioni iniziali. Non ci si trova ancora in una situazione caotica, ma il sistema denuncia una forte predisposizione al caos. Si ricordi che la descrizione quantistica del caso non dissipativo prevede che le (RIF PAGINA) fluttuazioni nel numero di fotoni spingano il campo oltre ai punti fissi semiclassici, con la sola eccezione degli stati numero, si può dunque pensare alle fluttuazioni come all'analogo quantistico dell'instabilità semiclassica.

Nel caso dissipativo, la mappa per il campo si può ricavare, analogamente a quanto fatto in descrizione microscopico-quantistica, moltiplicando  $\mathcal{F}(\mathcal{E}_n)$  per un esponenziale decrescente

$$\mathcal{E}_{n+1} = e^{-\gamma\tau_0} \mathcal{F}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{D}(\mathcal{E}_n) , \quad (2.42)$$

$\tau_0$  essendo la spaziatura temporale tra due atomi successivi (in questo modello l'iniezione è regolare, perciò  $\tau_0$  è costante). Si noti che ora  $\mathcal{E}_{n+1}$  rappresenta il campo appena prima dell'iniezione dell'atomo  $(n+2)$ -esimo, e non dopo



l'uscita dello  $(n+1)$ -esimo: tra i due eventi avviene il decadimento del campo stesso. Uno studio approfondito della (2.42) sarà effettuato nel Cap. 3.

## 2.4 Trattazione semiclassica per flussi atomici alti

Come premesso nell'introduzione a questa tesi, il contributo originale qui presentato consiste nel rilassare alcune delle assunzioni fatte sino ad ora in letteratura. Si propone qui un modello in cui un numero  $N \geq 1$  di atomi è sempre mediamente presente in cavità ('flussi alti'). È dunque necessario considerare tempi di interazione  $\tau_{int}$  dell'ordine di  $\tau_0$ , (si ricordi che  $\tau_0 = 1/R$ , dove  $R$  è la frequenza di ingresso in cavità degli atomi), dove  $\tau_0$  è, come nel modello precedente, la spaziatura temporale tra due atomi successivi. Guadagni e perdite sono trattati contestualmente e si considera inoltre una iniezione regolare. In definitiva l' unica approssimazione fatta è quella semiclassica

Si consideri dunque la Hamiltoniana di Jaynes e Cummings che—in approssimazione di dipolo elettrico e di onda rotante—descrive l'interazione tra il modo della cavità ed un numero  $N \geq 1$  di atomi a due livelli

$$\hat{H} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hbar\omega\hat{\sigma}_z^j}{2} + \hbar\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{j=0}^{\infty} \hbar\chi_j(\tau_{int})(g\hat{a}\hat{\sigma}_+^j + h.c.) \quad (2.43)$$

Tutti gli atomi sono presi in modo tale da avere la stessa frequenza di transizione  $\omega$ , risonante col modo della cavità e la costante di accoppiamento di dipolo elettrico  $g$  è reale. La  $\chi_j(\tau_{int})$  è il prodotto  $\theta(t - t_j)\theta(\tau_{int} - t + t_j)$ , dove  $\theta$  è la funzione a gradino: la (2.43) descrive l'interazione degli  $N$  atomi

presenti ad un certo istante  $t$  in cavità ( $t_j \leq t \leq t_j + \tau_{int}$ );  $t_j = j\tau_0$  è il momento di ingresso dell'atomo  $j$ -esimo in cavità e, per la iniezione regolare,  $\tau_{int} \equiv N\tau_0$ .

Ricavando le equazioni di Heisenberg per  $\hat{a}$ ,  $\hat{\sigma}_z^j$  e  $\hat{\sigma}_-^j$  esattamente come nel caso di flussi bassi e successivamente fattorizzando i valori di aspettazione si ha

$$\frac{d\sigma_-^j}{dt} = iga\sigma_z^j, \quad (2.44)$$

$$\frac{d\sigma_z^j}{dt} = 2ig(\sigma_-^j a^* - a\sigma_+^j), \quad (2.45)$$

$$\frac{da}{dt} = -ig \sum_{n=0}^{\infty} \chi_j(\tau_{int}) \sigma_-^j. \quad (2.46)$$

A questo punto nella (2.46) si può aggiungere il termine non conservativo  $-(\gamma/2)a$  e si ottiene

$$\frac{d\sigma_-^j}{dt} = ig\chi_j(\tau_{int})a\sigma_z^j, \quad (2.47)$$

$$\frac{d\sigma_z^j}{dt} = 2ig\chi_j(\tau_{int})(\sigma_-^j a^* - a\sigma_+^j), \quad (2.48)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\gamma}{2}a - ig \sum_{n=0}^{\infty} \chi_j(\tau_{int}) \sigma_-^j. \quad (2.49)$$

La corrispondenza  $\sigma_z^j \longrightarrow 2\Sigma_z^j$ ,  $\sigma_-^j \longrightarrow i\Sigma^j$  semplificherà il calcolo

$$\frac{d\Sigma^j}{dt} = 2g\chi_j(\tau_{int})a\Sigma_z^j, \quad (2.50)$$

$$\frac{d\Sigma_z^j}{dt} = -g\chi_j(\tau_{int})(\Sigma^j a^* + a(\Sigma^j)^*), \quad (2.51)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\gamma}{2}a + g \sum_{n=0}^{\infty} \chi_j(\tau_{int}) \Sigma^j, \quad (2.52)$$

dove  $\Sigma_z^j$  e  $g$  sono reali. Azzerando la fase del campo ad un dato istante  $t_j$  e la polarizzazione atomica ogni volta che l'atomo sta entrando in cavità, segue dalle (2.50) e (2.52) che l'ampiezza  $a$  e la polarizzazione  $\Sigma^j$  sono sempre reali, ovvero che  $\dot{\Sigma}^j$  è funzione continua del tempo, cioè il campo lasciato dall'atomo  $j$ -esimo all'uscita dalla cavità è lo stesso che trova il  $(j+N)$ -esimo al suo ingresso. Si ha

$$\frac{d\Sigma^j}{dt} = 2g\chi_j(\tau_{int})a\Sigma_z^j, \quad (2.53)$$

$$\frac{d\Sigma_z^j}{dt} = -2g\chi_j(\tau_{int})\Sigma^j a, \quad (2.54)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\gamma}{2}a + g \sum_{n=0}^{\infty} \chi_j(\tau_{int})\Sigma^j. \quad (2.55)$$

Il significato di queste equazioni è chiaro:  $\Sigma^j$  e  $\Sigma_z^j$  sono le componenti del vettore di Bloch dell'atomo  $j$ -esimo e  $(2ga)$  è la loro velocità angolare, la frequenza di Rabi. Se  $\Sigma_z^j = 1/2$ , l'atomo  $j$ -esimo è eccitato, e se  $\Sigma^j(t_j) = 0$  la sua polarizzazione è zero.

Si può subito osservare che

$$\dot{\Sigma}^j \Sigma^j + \dot{\Sigma}_z^j \Sigma_z^j = 0, \quad (2.56)$$

ovvero lunghezza del vettore di Bloch è una costante del moto

$$(\Sigma^j)^2 + (\Sigma_z^j)^2 = \text{cost.} \quad (2.57)$$

Passando in coordinate polari

$$\Sigma^j = \frac{1}{2} \sin \phi_j, \quad (2.58)$$

$$\Sigma_z^j = \frac{1}{2} \cos \phi_j, \quad (2.59)$$

e sostituendo le (2.58) e (2.59) nella (2.53) o nella (2.54), si ricava

$$\frac{d\phi_j}{dt} = 2g\chi_j(\tau_{int})a, \quad (2.60)$$

che integrata da  $t = t_j$  diventa

$$\phi_j = 2g \int_{t_j}^t d\bar{t}a(\bar{t}). \quad (2.61)$$

La  $\dot{\phi}_j$ , derivata dell'angolo di rotazione del vettore di Bloch, è la 'frequenza di Rabi'  $\phi_j$ . Sostituendo la (2.61) nelle (2.58) e (2.59) si ha

$$\Sigma^j = \frac{1}{2} \sin \left[ 2g \int_{t_j}^t d\bar{t}a(\bar{t}) \right], \quad (2.62)$$

$$\Sigma_z^j = \frac{1}{2} \cos \left[ 2g \int_{t_j}^t d\bar{t}a(\bar{t}) \right], \quad (2.63)$$

così che, per  $t = t_j$ , si ha  $\Sigma_z^j = 1/2$  e  $\Sigma^j = 0$  ovvero l'atomo entra eccitato sul livello superiore.

Infine si ricava l'equazione per il campo

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\gamma}{2}a + \frac{g}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \sin \left[ 2g \int_{t_j}^t d\bar{t}a(\bar{t}) \right], \quad (2.64)$$

e ponendo

$$t_j = j\tau_0 \quad t = (J - 1 + \eta)\tau_0, \quad (2.65)$$

con  $J$  intero e  $0 \leq \eta \leq 1$ , dal prodotto delle funzioni a gradino si ha che  $J - N \leq j \leq J - 1$ , e dunque la equazione per  $a$  può anche essere scritta così

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\gamma}{2}a + \frac{g}{2} \sum_{j=J-N}^{J-1} \sin \left[ 2g \int_{j\tau_0}^{(J-1+\eta)\tau_0} d\bar{t}a(\bar{t}) \right]. \quad (2.66)$$

Essendo la (2.64) una equazione integro-differenziale, è necessario passare ad un insieme di equazioni per poterne effettuare la integrazione numerica. Siano  $t'' = t/\tau_0$  il tempo adimensionale, ed  $x(t'') = g\tau_{int}a(t'')$  il campo riscaldato, la (2.64) diventa

$$\frac{dx}{dt''} = -\frac{1}{2N_{ex}}x + \frac{\Theta^2}{2NN_{ex}} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(N) \sin \phi_j, \quad (2.67)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt''} = \frac{2}{N}x\chi_j(N), \quad (2.68)$$

dove  $N_{ex} = 1/\gamma\tau_0$  e  $\Theta = g\tau_{int}\sqrt{N_{ex}}$  sono rispettivamente il numero di atomi che attraversa la cavità durante il tempo di vita di un fotone  $\gamma^{-1}$  e  $\Theta$  è il parametro di pompa.

Il sistema (2.67), (2.68) è composto di  $(N + 1)$  equazioni e dipende dall'insieme di parametri  $\{N, N_{ex}, \Theta\}$ . Nel caso  $N = 1$  (cioè  $\tau_0 = \tau_{int}$ ), esso è equivalente alla equazione di un pendolo smorzato e forzato di massa  $m = \gamma/(g^2\tau_{int})$

$$m\frac{d^2\phi}{dt''^2} + \frac{m}{2N_{ex}}\frac{d\phi}{dt''} - \frac{1}{N_{ex}}\sin \phi = 0, \quad (2.69)$$

dove  $\phi(t'') = \phi_j(t'')$  per  $t'' \in [j, j + 1[$  e ad ogni ‘calcio’ dato a  $t'' = j = 0, 1, 2, \dots$ , l'angolo di Bloch è posto uguale a zero mentre la velocità  $\dot{\phi}$  è continua.

Nel seguito ci si concentrerà solo sulla dinamica ‘stroboscopica’ del campo, vale a dire si andrà ad osservare la sua evoluzione a multipli interi di  $\tau_{int}$ , mediando il suo valore su ogni  $\tau_{int}'' = N$ .

Per l'analisi dei dati sarà particolarmente utile l'equazione per i punti fissi del sistema. Nel caso  $N = 1$  la Eq. (2.60) e la (2.64) si possono riscrivere come segue

$$\frac{da^2}{dt} = -\gamma a^2 + g\chi_j(\tau_{int})a \sin \phi \quad (2.70)$$

$$\frac{d\phi_j}{dt} \sin \phi = 2g\chi_j(\tau_{int})a \sin \phi . \quad (2.71)$$

Sottraendo la (2.71) alla (2.70) si ottiene

$$\frac{d}{dt}(a^2 + \frac{1}{2} \cos \phi) = -\gamma a^2 . \quad (2.72)$$

Integrando la (2.72) nell'intervallo  $[j\tau_0, (j+1)\tau_0 - \epsilon]$  tra l'entrata e l'uscita dell'atomo  $j$ -esimo in cavità si ha

$$\begin{aligned} & a^2((j+1)\tau_0) - a^2(j\tau_0) + \\ & + \frac{1}{2}(\cos \phi((j+1)\tau_0) - \cos \phi(j\tau_0)) = \\ & = - \int_{j\tau_0}^{(j+1)\tau_0} \gamma a^2(\bar{t}) d\bar{t} . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Usando la condizione  $\phi(j\tau_0) = 0$  ed imponendo la stazionarietà con  $a^2((j+1)\tau_0) = a^2(j\tau_0)$  si ottiene

$$\sin^2 \bar{x} - m\overline{x^2} = 0 , \quad (2.74)$$

dove  $\bar{f}$  denota la media temporale di  $f$  su  $\tau_0'' = 1$ .

La (2.74) può essere riscritta in termini della fluttuazione relativa  $\sigma_x^2 = \overline{\Delta x^2}/\overline{x^2}$  come segue

$$\sin^2 \bar{x} - m\bar{x}^2(1 + \sigma_x^2) = 0 . \quad (2.75)$$

Trascurando  $\sigma_x^2$  rispetto ad 1, ovvero imponendo che il campo in cavità abbia fluttuazioni abbastanza piccole, si ottiene l'equazione per i punti fissi del sistema

$$\frac{\sin^2 \bar{x}}{\bar{x}} - m\bar{x} = 0 . \quad (2.76)$$

La (2.76) è facilmente generalizzabile al caso di  $N > 1$  atomi [22]

$$\frac{N \sin^2 \bar{x}}{\bar{x}} - m\bar{x} = 0 . \quad (2.77)$$

Tra le soluzioni  $x_f$  della (2.77) ce ne sono alcune che corrispondono a derivata positiva di  $\sin^2 x$ , le quali sono incondizionatamente instabili, ovvero sono instabili per ogni valore dei parametri  $\{N, N_{ex}, \Theta\}$ . La stabilità delle altre radici dipende invece dai parametri, e perciò sono dette condizionatamente stabili : queste saranno analizzate in dettaglio nel prossimo capitolo.

Figura 2.1: Quantum collapse e quantum revival in un campo maser coerente con numero medio di fotoni dello stato stazionario  $\langle n \rangle = 4$ .



Figura 2.2: Varianza  $Q_a$  degli atomi nel livello maser inferiore come funzione del flusso  $N_{ex}$  vicino all'inizio della oscillazione maser per la transizione  $63p_{3/2} \leftrightarrow 61d_{3/2}$ .



Figura 2.4: Numero medio normalizzato di fotoni dello stato stazionario come funzione del parametro di pompa  $\Theta$  per  $N_{ex} = 20, 200, 2000$  ed un numero di fotoni di corpo nero  $n_b = 0.1$ .

Figura 2.5: Deviazione standard  $\sigma$  della distribuzione di fotoni per  $N_{ex} = 200$  ed  $n_b = 0.1$ . Una distribuzione Poissoniana corrisponde a  $\sigma = 1$ .

Figura 2.6: Media (linea continua) e varianza (linea tratteggiata) della distribuzione dei fotoni che evolve—da una iniziale Poissoniana con  $\langle n \rangle = 8$ —come funzione del numero di atomi che hanno attraversato la cavità durante il tempo di interazione  $g\tau_{int} = 2\pi/\sqrt{199}$ .

Figura 2.7: Mappa  $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{F}(\mathcal{E}_n)$  per atomi inizialmente invertiti e  $\tau_{int} = 5$ .

# Capitolo 3

## Risultati della descrizione semiclassica

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo si espongono le previsioni della teoria semiclassica del micromaser. Si considera una cavità con perdita  $\gamma \neq 0$  ed iniezione regolare, e si analizzano separatamente i casi di flussi atomici bassi (al massimo un atomo alla volta in cavità e  $\tau_{int} \ll \gamma^{-1}$ ) e di flussi atomici alti ( $N \geq 1$  atomi alla volta,  $\tau_{int} = N\tau_0$ ) Si ricordi che tutti gli atomi si suppongono eccitati al momento dell'ingresso in cavità.

L'attenzione sarà puntata sulla evoluzione dinamica del campo, non semplicemente sui suoi stati stazionari (come invece si fa nel modello microscopico-quantistico [5]).

## 3.2 Flussi bassi

La predisposizione al caos denunciata da successive iterazioni della mappa (2.36) per il campo nel caso di cavità perfetta, si realizza se si considera anche lo smorzamento della radiazione. La (2.42) è mostrata in Fig. (3.1) per  $a = 0.9$  e  $\tau_{int} = 9$ . Al posto degli infiniti punti fissi della Fig. (2.7) ora si

Figura 3.1: Mappa  $\mathcal{E}_{n+1} = e^{-\gamma\tau_0}\mathcal{F}(\mathcal{E}_n)$  per atomi inizialmente invertiti,  $\tau_{int} = 9$  ed  $e^{-\gamma\tau_0} = 0.9$ .

ha un numero finito di soluzioni. Alcune di esse, le  $\mathcal{U}_j$ , sono assolutamente instabili; le altre, le  $\mathcal{S}_j$ , sono potenzialmente instabili, nel senso che possono evolvere in punti fissi, o periodici, o caotici, a seconda delle condizioni iniziali del sistema.



In generale, osservando il grafico di  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ , si possono fare le seguenti considerazioni:

- i) sia  $\mathcal{E}_{max}^i$  il massimo locale della mappa tra i punti fissi  $\mathcal{U}_{i-1}$  ed  $\mathcal{S}_i$ .  
C'è sempre un valore  $k$  dell'indice  $i$  tale per cui  $\mathcal{E}_{max}^k < \mathcal{U}_k$  (in figura questo valore è  $k = 5$ ). Nessuna condizione iniziale  $\bar{\mathcal{E}}$  con  $\bar{\mathcal{E}} < \mathcal{E}_{max}^k$  può evolvere oltre a questo punto.
- ii) Se si parte da un campo iniziale  $\bar{\mathcal{E}} > \mathcal{S}_l$ , dove  $\mathcal{S}_l$  è il punto fisso più grande, l'evoluzione del sistema porterà a  $\mathcal{S}_l$  come punto fisso o comunque come attrattore che ad esso si sostituisce ( $\mathcal{A}_l$ ).
- iii) La pendenza della mappa  $\mathcal{D}(\mathcal{S}_i)$ , e dunque la stabilità dei punti fissi, varia con  $i$ ; si possono quindi avere simultaneamente sulla stessa curva punti fissi e potenziali attrattori caotici. Ad esempio in Fig. (3.1) i punti  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_l$  sono stabili, ma  $\mathcal{S}_3$  è instabile e viene sostituito da un attrattore di periodo 4,  $\mathcal{S}_4$  parimenti è sostituito da un attrattore quasi periodico  $\mathcal{A}_4$ , mentre  $\mathcal{S}_5$  da un attrattore di periodo 2. Le Figg. (3.2), (3.3) e (3.4) mostrano le successive iterazioni della (2.42) per  $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_4$  ed  $\mathcal{S}_5$  per  $e^{-\gamma\tau_0} = 0.9$  e  $\tau_{int} = 9$ .

Rimanendo invece nelle vicinanze di un punto fisso, e variando uno dei parametri del sistema, si può giungere ad una serie di biforcazioni che portano al caos. Ad esempio per un sistema senza perdite  $\mathcal{S}_3$  è un punto fisso marginalmente stabile, cioè un punto che è stabile se raggiunto da un lato ed

Figura 3.2: Iterazione della mappa  $\mathcal{D}$  che illustra l'approccio al punto fisso  $\mathcal{S}_2$ .

instabile se avvicinato dall'altro. La sua stabilità cresce aumentando  $\alpha$  (vale a dire diminuendo  $\gamma$ ), ma per  $\alpha \simeq 0.93$  si ha una biforcazione in un punto di periodo 2. Per  $\alpha \simeq 0.88$  il sistema sembra caotico, per  $\alpha \simeq 0.8$  è decisamente caotico. Queste note sono illustrate nella Fig. (3.5).

Non è stato fatto uno studio sistematico dell'evoluzione di  $\mathcal{S}_3$ , è stato però ipotizzato che si realizzi una sequenza di Feigenbaum che porterebbe, con successive biforcazioni, al caos. Questo sia per considerazioni sulla natura locale della mappa (2.42), sia perché l'esame della trasformata di Fourier dell'inversione atomica dopo successive iterazioni dà una banda larga per

Figura 3.3: Iterazione della mappa  $\mathcal{D}$  che illustra l'approccio all'attrattore quasi periodico  $\mathcal{A}_4$ .

$\alpha \simeq 0.8$ .

Se si prosegue l'indagine, si può prevedere che il caos subisca una interruzione e si abbia una finestra d'ordine con comportamento nuovamente periodico. Ad esempio, per  $\alpha \simeq 0.6$ ,  $\mathcal{S}_3$  è di nuovo un attrattore periodico (di periodo 8). Il micromaser a bassi flussi sembra dunque essere caotico e presenta forti analogie col sistema del pendolo smorzato e dampato, solo che qui l'elemento forzante è costituito dall'interazione coerente atomi-campo (si ricordi che nella analisi del micromaser senza smorzamento erano state ricavate proprio le equazioni di pendolo (2.34) e (2.35)).

Figura 3.4: Iterazione della mappa  $\mathcal{D}$  che illustra l'approccio all'attrattore di periodo  $2\mathcal{A}_5$ .

I bacini di attrazione dei punti fissi della mappa (2.42) sono strettamente intrecciati: Grebogi et al. ([23]) hanno indagato la natura dei confini fra bacini multi-dimensionali intrecciati per vari tipi di mappe. Si è visto che questi confini possono avere diverse proprietà in diverse regioni, e queste regioni possono intersecarsi su una scala arbitrariamente fine. Viene dunque da pensare ad una dinamica di tipo frattale: altro segnale della forte instabilità del sistema.

Per quanto riguarda la corrispondenza tra dinamica classica e quantistica, si deve notare che nel caso quantistico per il micromaser è prevista la evo-

Figura 3.5: Iterazioni della mappa  $\mathcal{D}$  nelle vicinanze del punto fisso  $\mathcal{S}_3$  per  $\tau_{int} = 9$ . Se  $\alpha = 0.95$  (a) il sistema evolve verso il punto fisso  $\mathcal{S}_3$ ; se  $\alpha = 0.93$  (b) verso un attrattore di periodo 2; se  $\alpha = 0.88$  (c) verso il caos; ad  $\alpha = 0.8$  (d) c'è ancora il caos; se  $\alpha = 0.6$  (e) il sistema va verso un attrattore di periodo 8.

luzione verso uno stato stazionario unico, in apparente contraddizione con la presenza di cicli classici. Si deve però ricordare che la scala di tempi per la quale si ha accordo fra le due dinamiche è molto più breve del tempo di regime quantistico e per scale di tempi sufficientemente brevi un ciclo classico può corrispondere ad una distribuzione di probabilità con molti picchi ([24]). Kennedy, Meystre e Wright hanno mostrato che aggiungendo rumore alla descrizione semiclassica si ottengono per  $\langle n \rangle$  lo stesso tipo di soglie che

Filipowicz, Javanainen e Meystre avevano previsto nel loro lavoro [5]. In pratica, mediando i risultati semiclassici su un insieme random di condizioni iniziali, la dipendenza della mappa da  $\alpha$  e  $\tau_{int}$  converge ad una dipendenza dal solo parametro  $\Theta$  ( $N_{ex}$  è fissato).

Si ricordi che proprio variando  $\alpha$  il sistema classico va verso il caos. La relazione tra il parametro quantistico ed i parametri semiclassici è la seguente

$$\tau_{int} = \frac{\Theta}{N_{ex}}, \quad (3.1)$$

$$\alpha = e^{-(1/2N_{ex})}. \quad (3.2)$$

Quindi fissare  $N_{ex}$  (il flusso atomico) corrisponde a fissare  $\alpha$ , mentre  $\tau_{int}$  può variare. Ciò significa che a parità di numero di atomi in cavità nel tempo di vita di un fotone, è la durata  $\tau_{int}$  della loro interazione con la radiazione a determinare l'entità della pompa. L'accordo tra dati quantistici e risultati semiclassici mediati diminuisce poi se  $N_{ex}$  aumenta.

In base a questo esempio, si può dunque pensare che l'aggiunta di rumore al sistema lo faccia sembrare più 'quanto-meccanico'. Il rumore simulerebbe le fluttuazioni. Il lavoro di Kennedy, Meystre e Wright non ha comunque la pretesa di essere esaustivo, e porta a chiedersi se le corrispondenze viste siano accidentali e quale sia il loro significato fisico. Inoltre, non si riesce ancora a decidere se sistemi a spin 1/2 siano veramente buoni candidati per studiare la corrispondenza tra descrizione semiclassica e descrizione quantistica in sistemi che esibiscono instabilità dinamiche classiche.

## 3.3 Flussi alti

La trattazione ed i risultati di questa sezione sono in corso di stampa [25].

### 3.3.1 Analisi generale

L'integrazione numerica delle equazioni (2.67) e (2.68)—che descrivono il micromaser attraversato da flussi alti di atomi—rivela una quantità di differenti comportamenti del sistema. Si consideri innanzitutto l'evoluzione temporale stroboscopica del campo rispetto al tempo adimensionale  $t'' = t/\tau_0$  (vale a dire per  $t''$  multiplo intero di  $\tau''_{int} = N$ ). Si ricordi che il valore del campo  $x$  viene mediato su ogni  $\tau''_{int} = N$ , dove  $N$  è il numero di atomi presenti contemporaneamente in cavità. Per semplicità si scriverà d'ora in poi  $x$  anziché  $\bar{x}$  per indicare la media temporale.

I tre parametri da cui dipende il sistema sono, come detto,  $N$ ,  $N_{ex}$  e  $\Theta$ . C'è poi un quarto 'parametro', la dipendenza dal quale non è però analitica: la condizione iniziale per il campo  $x_0$ . In effetti variando  $x_0$  il sistema evolve verso stati finali diversi non prevedibili a partire dalle (2.67) e (2.68). La forte dipendenza dalle condizioni iniziali è un indizio delle attitudini caotiche del micromaser, attitudini che confermerebbero le previsioni di Meystre et al., anche se in una situazione fisica non del tutto equivalente). Il problema della dipendenza dalle condizioni iniziali verrà esaminato in seguito.

Si consideri il caso di campo iniziale  $x_0$ ,  $N$  ed  $N_{ex}$  fissati e parametro di

pompa variabile; si possono in questo modo osservare le diverse evoluzioni del sistema verso:

- i) punti fissi,
- ii) punti periodici,
- iii) orbite quasi periodiche,
- iv) orbite caotiche.

In Fig. (3.6) è mostrato il punto *i*) per  $N = 1$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$  e  $\Theta = 100$ . Si noti che in realtà all'interno di ogni  $\tau''_{int}$  avvengono quelle oscillazioni che l'equazione (2.69) del pendolo lascia prevedere, come è illustrato dal secondo grafico in Fig. (3.6). A questo proposito si ricordi che il significato che qui si dà alla locuzione 'punto fisso' non è quella usuale, visto che come detto il campo viene mediato su ogni  $\tau''_{int}$ .

Se si cambia il numero di atomi in cavità, le oscillazioni all'interno di ogni  $\tau''_{int}$  cambiano periodo. Una quantità maggiore di atomi porta come conseguenza una maggior complessità della dinamica 'interna' al tempo di transito. La Fig. (3.7) illustra questo caso, con  $N = 2$ .

Nella Fig. (3.8) sono invece raffigurate due orbite rispettivamente di periodo 4 ed 8; qui  $N$ ,  $N_{ex}$  ed  $x_0$  sono come in Fig. (3.6), mentre rispettivamente  $\Theta = 140$  e  $\Theta = 144$  (caso *ii*). Dalla definizione di  $1/m$  (è  $1/m = g^2 \tau_{int} / \gamma$ ) si vede che aumentando la costante di accoppiamento di dipolo elettrico  $g$  del micromaser aumenta il peso del fattore oscillante ( $\sin \phi$ )



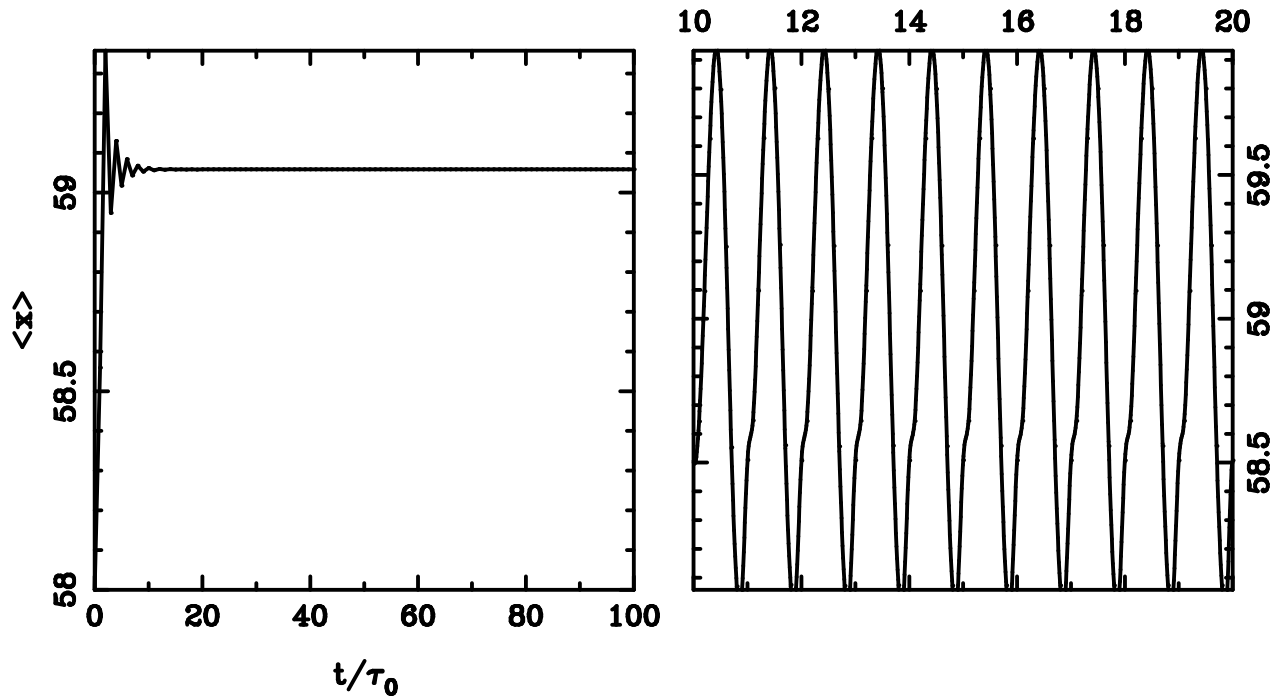


Figura 3.6: Evoluzione dinamica del campo in cavità per  $N = 1$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$ , e  $\Theta = 100$ . Il primo grafico presenta la visione stroboscopica, il secondo evidenzia invece le oscillazioni di  $x$  all'interno di ogni  $\tau_0$ .

nella equazione (2.69). Ciò significa che, a parità delle altre condizioni, una cavità migliore porta con sé una maggiore instabilità del sistema, cosa che è confermata dai due grafici in Fig. (3.8), che si differenziano appunto per il  $\Theta$ , dove  $1/m = \Theta^2/N$ . Il punto *iii*) è rappresentato in Fig. (3.9). Ovviamente la figura descrive solo una parte dell'evoluzione del sistema, perché, per definizione di orbita quasi periodica, la sua struttura non si ripete mai uguale a se stessa. Infine in Fig. (3.10) è rappresentata una orbita caotica

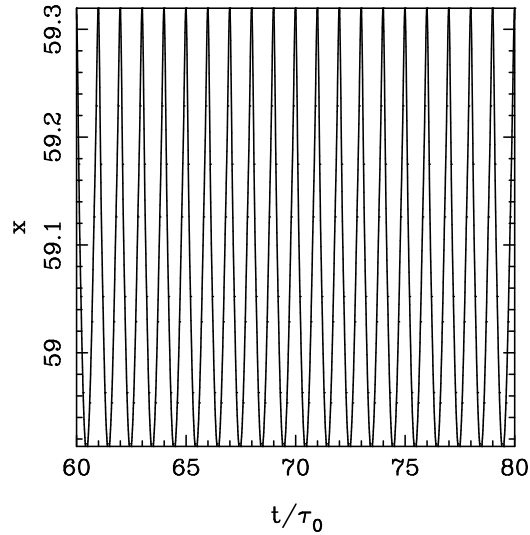


Figura 3.7: Evoluzione dinamica non stroboscopica del campo nel caso  $N = 2$ ,  $N_{ex} = 100$ ,  $x_0 = 58$ , e  $\Theta = 141.4$ . Si è fatto evolvere  $x$  sino a  $t'' = 60$  prima di osservarlo, per dar tempo al sistema di stabilizzarsi su quello che stroboscopicamente è un punto fisso ( $x=59.26$ ).

per  $N = 1$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$  e  $\Theta = 160$ . Osservando tutti i diversi esiti dell'evoluzione temporale del campo, si verifica facilmente che i punti su cui questo si assesta sono tutti soluzioni condizionatamente stabili della equazione (2.77). Si rammenti il significato della locuzione 'condizionatamente stabili' (pag. 31), ovvero stabili a seconda dei valori dei parametri  $N$ ,  $N_{ex}$  e  $\Theta$ . In pratica l'iniziale punto fisso  $x_f$  può biforcare, oppure può evolvere in una orbita quasi periodica, od ancora verso un altro punto fisso. Parimenti punti doppi possono evolvere in punti doppi od ancora si può avere che la

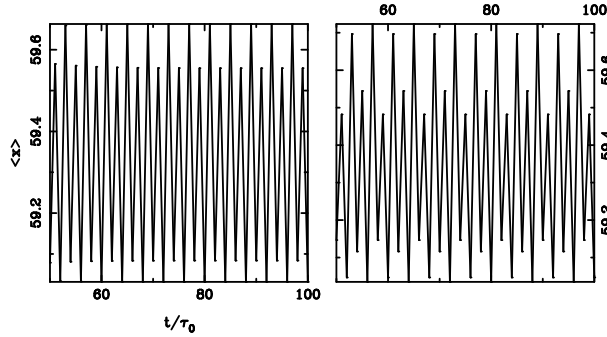


Figura 3.8: Evoluzione stroboscopica del campo nel caso  $N = 1$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$  e  $\Theta = 140$  per il primo grafico,  $\Theta = 144$  per il secondo.

soluzione per tempi lunghi salta su diverse orbite periodiche. La tabella (3.1) mostra, per i valori dei parametri relativi alle Figg. (??),(??), (??) e (??), quali sono gli  $x_f$  più prossimi al valore del campo su cui si assesta il sistema. Nei casi in cui quest'ultimo non raggiunga un ben preciso punto fisso, il 'valor medio' delle  $x$  tra cui salta corrisponde circa ad una delle radici della (2.77).

Si deve notare che, a proposito delle soluzioni della (2.77), per parametri  $N$ ,  $N_{ex}$  e  $\Theta$  fissati l'attrattore sul quale il sistema converge non è necessariamente la radice della (2.77) più vicina alla  $x_0$ , ma dipende fortemente dalla

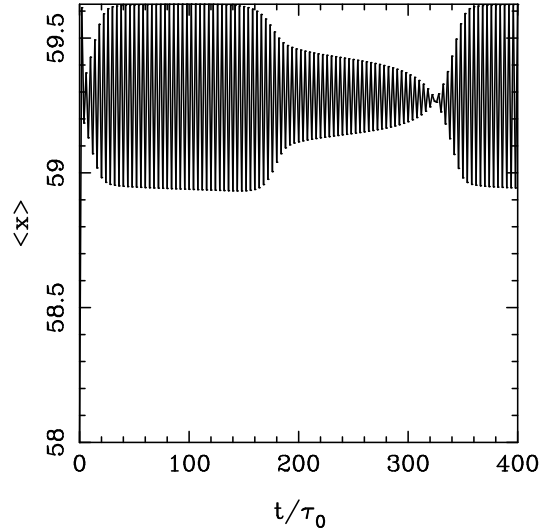


Figura 3.9: Evoluzione stroboscopica del campo nel caso  $N = 2$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$  e  $\Theta = 132$ .

condizione iniziale stessa. Se invece si parte da un valore iniziale  $x_0$  più grande dell'ultima delle soluzioni della (2.77), il campo ricade sempre su questa, come si era visto nel caso di flussi atomici bassi. La Fig. (3.11) mostra il caso  $N = 3$ ,  $N_{ex} = 150$ ,  $x_0 = 40$  e  $\Theta = 63.6$ . Si noti che la radice più alta della Eq. (2.77) è, per  $N = 3$  ed  $m = 3/(63.6)^2$  (per definizione  $m = N/\Theta^2$ ), proprio  $x_f = 36.28$ . Analizzando i modi dell'evoluzione temporale del campo, si è potuto vedere che, a parità di altre condizioni, il valore di  $N_{ex}$  lascia traccia di se nei tempi di assestamento del sistema sull'attrattore. Ad esempio, per  $N_{ex} = 50$ , occorre un  $t''$  dell'ordine dei  $50\tau_{int}''$  perché il campo raggiunga

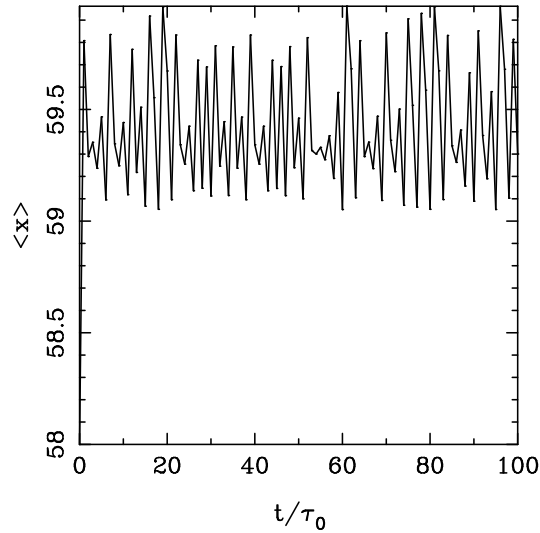


Figura 3.10: Dinamica stroboscopica caotica del campo per  $N = 1$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$  e  $\Theta = 160$

l'attrattore fisso o periodico o caotico. Questa legge ovviamente non è stata stabilita in maniera rigorosa, ma per lo meno permette di pensare ad un tempo di stabilizzazione del sistema molto minore del tempo di scala massimo  $t_{sc} \simeq N_{ex}\gamma^{-1}$  per l'accordo tra le descrizioni quantistica e semiclassica [26, 24].

La validità dell'approssimazione semiclassica implica che il numero dei fotoni in cavità sia abbastanza grande ( $n \gg 1$ ), in modo da far prevalere il carattere ondulatorio della luce su quello corpuscolare. In termini matematici la fattorizzazione dei valori di aspettazione nelle equazioni di Heisenberg è

$N$	$\Theta$	$x_f$	$x_{min}, x_{max}$
1	100	59.06	59.06
1	140	59.25	59.03, 59.66
2	132	59.23	58.94, 59.62
1	160	59.31	59.06, 59.96

Tavola 3.1:  $\{N_{ex} = 50, x_0 = 58\}$

possibile solo se le fluttuazioni del campo in cavità possono essere trascurate rispetto ai valori medi. Dalle relazioni

$$a \simeq \sqrt{n}, \quad (3.3)$$

$$x \doteq g\tau_{int}a, \quad (3.4)$$

discende che la validità dell'approccio semiclassico è dato dalla disuguaglianza

$$x \gg g\tau_{int} = \Theta/N_{ex}. \quad (3.5)$$

Perciò, nello stabilire la condizione iniziale  $x_0$  ed i parametri  $\Theta$  ed  $N_{ex}$ , si deve tener conto della condizione (3.5) per non uscire dai limiti della teoria.

### 3.3.2 Analisi della dipendenza da $\Theta$

In questa sezione si presenta un'analisi più accurata della dipendenza del campo dal parametro di pompa. L'analisi procede mediante un programma numerico che fissato  $\Theta$  e fa evolvere il campo medio  $x$  sino ad un tempo  $t_0'' = 200N$ , registra quindi i successivi 100 valori di  $x$  e li traccia sulla verticale in corrispondenza del  $\Theta$  scelto.

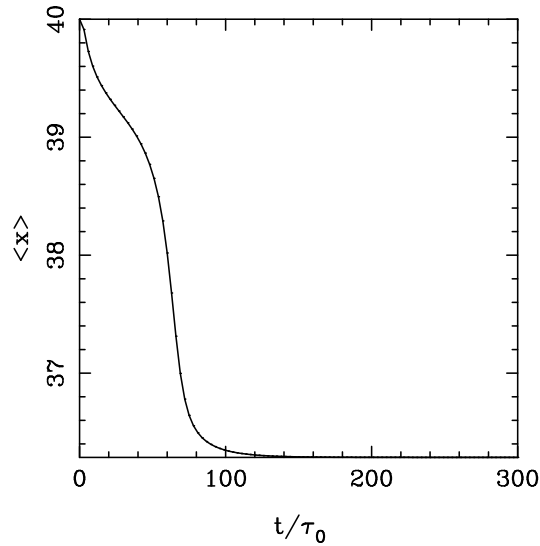


Figura 3.11: Caduta del campo sulla radice  $x_{f,max}$  più alta della equazione dei punti fissi, nel caso che la condizione iniziale  $x_0$  sia maggiore di  $x_{f,max}$ .

Come detto, molteplici scenari possono presentarsi, e tra questi anche una sequenza di Feigenbaum che sfocia nel caos. In Fig. (3.12) è mostrata questa evenienza nel caso  $N = 1$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$ . La linea punteggiata rappresenta l'unica delle radici della (2.77), per  $N = 1$  e  $\Theta$  corrente, che sta tra  $x = 59$  ed  $x = 60$ . Il sistema dunque inizialmente si assesta su di un punto fisso, poi biforca, poi diventa un punto quadruplo ed uno di periodo 8, ma si noti che il 'valor medio' di queste orbite è sempre la radice della (2.77).

Il caos inizia presumibilmente per  $\Theta \simeq 144.7$  ed è intervallato da tre finestre d'ordine quasi equispaziate in corrispondenza di  $\Theta \simeq 147.4$ ,  $\Theta \simeq 152.9$

Figura 3.12: caption qui

e  $\Theta \simeq 157.5$ . La terza finestra è particolarmente ampia e contiene un punto triplo, mostrato in Fig. (3.13). In Fig. (3.14) è mostrata la evoluzione temporale del campo per valori progressivi del parametro di pompa: è chiaro dai primi tre grafici che la complessità della dinamica aumenta con  $\Theta$  (il quarto verrà illustrato più avanti). Dunque la Fig. (3.14) conferma le previsioni fatte da Meystre et al.[6], anche se la situazione fisica qui è differente, perché la cavità è sempre piena ( $t''_{int} = 1$ ), vale a dire  $\tau_{int} = \tau_0$ , anziché quasi sempre vuota ( $\tau_{int} \ll \gamma^{-1}$ ).

È testando la situazione per  $\Theta$  maggiori che si scopre una situazione piuttosto sorprendente. La Fig. (3.15) mostra che, dopo la dinamica caotica, il



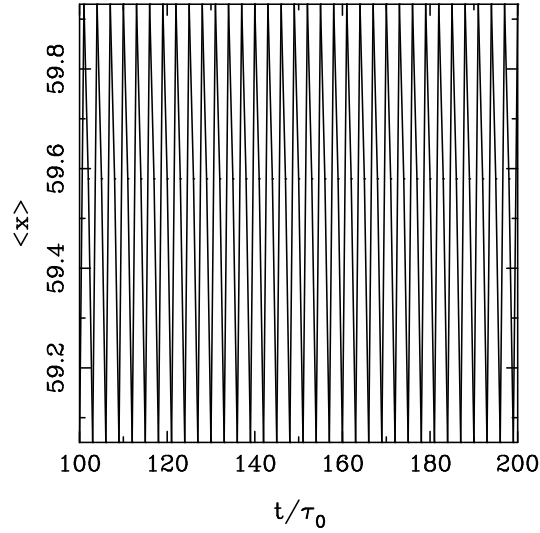


Figura 3.13: Punto triplo (stroboscopico) nell'ambito della finestra d'ordine a  $\Theta \simeq 157.5$ , nel caso di Fig. (3.12).

campo salta bruscamente su valori molto più alti, in una specie di 'transizione di fase'. Si noti che il valore del parametro di pompa per cui questo avviene è  $\Theta_c \simeq 166.5$  (molto maggiore del  $\Theta$  della soglia classica del micromaser  $\Theta = 1$  [8], ed anche delle soglie successive alla prima trovate da Filipowicz, Javanainen e Meystre [5]).

Questo fenomeno può essere interpretato sottolineando che, aumentando la costante di accoppiamento di dipolo elettrico  $g$ , cresce l'instabilità del sistema, come si è visto esaminando l'equazione del pendolo (2.69). In effetti nell'equazione dei punti fissi (2.77) si vede che se  $g$  è maggiore, diminuisce  $m$ ,

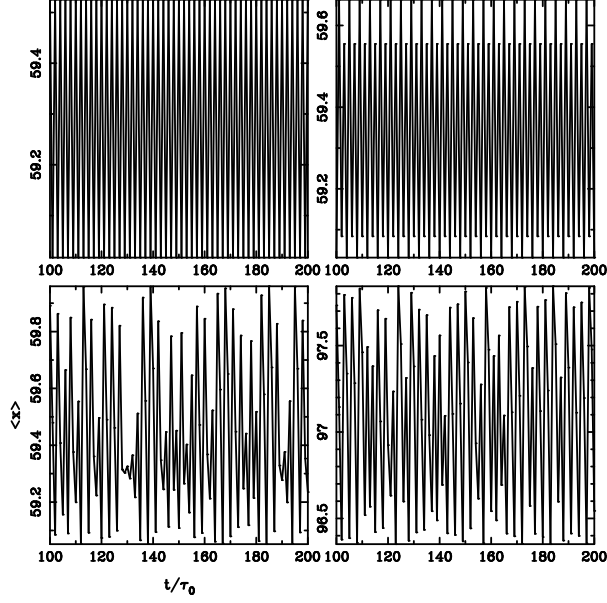


Figura 3.14: In figura sono mostrate quattro fasi successive (per  $\Theta = 130, 140, 160, 180$ ) della evoluzione dinamica stroboscopica del campo.

ovvero la pendenza della retta che interseca  $(N \sin^2 x/x)$ ; ciò significa che il numero delle radici della (2.77) aumenta. Il sistema diventa multistabile, ed i bacini di attrazione dei punti fissi sono sempre più intrecciati. La dipendenza dalle condizioni iniziali diviene talmente critica da favorire ad un certo punto una sorta di ‘effetto tunnel classico’, che non si risolve però solo in un brusco salto. Infatti il sistema oscilla repentinamente tra un certo numero di orbite caotiche e quasi-periodiche, tutte centrate su soluzioni della (2.76)—il quarto grafico della Fig. (3.14) mostra una di queste orbite—: questo fatto denuncia una forte sensibilità del sistema al valore di  $\Theta$ , ed è un altro indice delle sue attitudini caotiche.

Figura 3.15: caption qui

A questo proposito durante lo studio numerico del sistema si è evidenziato un fatto che ha avvalorato l'ipotesi di estrema instabilità del sistema. Si consideri infatti l'equazione di pendolo (2.69). La frequenza di oscillazione di  $\phi$  è  $\omega = 1/\sqrt{mN_{ex}}$ , vale a dire  $g\tau_{int}$ , dunque la integrazione delle (2.67), (2.68) deve essere eseguita con passi  $\Delta t \ll 2\pi\sqrt{mN_{ex}}$ , per non incorrere in errori numerici. In genere un  $\Delta t \simeq 10^{-3}$  è adatto allo scopo. Al variare di  $\Delta t$  si è notato che mentre ci possono essere differenze sui dettagli dell'evoluzione temporale del campo, non ci sono diversità nel 'diagramma di fase', nel senso che il  $\Theta_c$  è sempre lo stesso. La Fig. (3.16) mostra il confronto tra i risultati ottenuti con  $N = 1$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$ ,  $\Theta = 170$  e  $\Delta t \simeq 10^{-2}$  e  $\Delta t \simeq 10^{-3}$ .

Si può notare che il campo salta in tutti e due i casi su valori più alti per  $t''$  dell'ordine di 10 , e la radice su cui si assesta può variare: ciò comunque non modifica il diagramma di fase finale. In un'analogia termodinamica nelle Figg. (3.12) e (3.15) si può pensare a  $\Theta$  come al parametro d'ordine di una transizione continua. In letteratura non si sono trovate mappe caotiche con

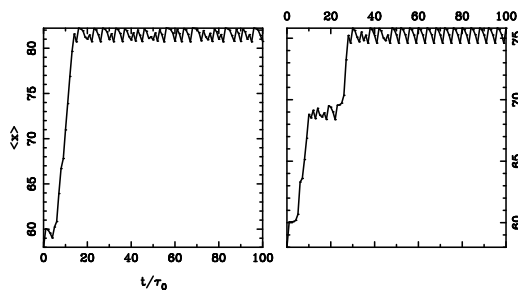


Figura 3.16: Confronto tra il risultato ottenuto utilizzando un passo  $\Delta t \simeq 10^{-2}$  e quello ottenuto con un  $\Delta t \simeq 10^{-3}$  nella analisi dell'evoluzione temporale del campo per  $N = 1$  ,  $N_{ex} = 50$  ,  $x_0 = 58$  e  $\Theta = 170$ .

comportamenti simili a quelli sopra visti. Alcune analogie possono essere ravvisate nella mappa

$$x_{t+1} = x_t + a \sin 2\pi x_t + \Omega , \quad (3.6)$$

studiata da Jensen e Jessup in [27], che presenta alternarsi di caos ed ordine al variare del ‘parametro d’ordine’  $a$ .

Si considera ora il caso  $N = 2$ , per  $N_{ex}$  ed  $x_0$  come nel caso precedente. In Fig. (??) si vede che al posto della sequenza di Feigenbaum il sistema esibisce una apertura del punto fisso in orbite quasi-periodiche. La Fig. (3.17) mostra l’evoluzione temporale del campo per  $\Theta = 120$  e  $\Theta = 138$ . Per il primo valore del parametro di pompa si ha una orbita quasi periodica la cui struttura giustifica l’alto numero di valori diversi del campo che sono rappresentati in Fig. (??) in corrispondenza di  $\Theta = 120$ . Per il secondo valore del parametro di pompa, il secondo grafico in Fig. (3.17) serve a rendere conto degli spazi bianchi della Fig. (??): la dinamica del campo è anche in questo caso quasi-periodica, e poiché  $x$  non assume valori intermedi tra 58.95 e 59.70 , il risultato è quello rappresentato. C’è da notare che proseguendo l’evoluzione temporale del campo si trova ancora una orbita quasi periodica, ma con profilo diverso dalla precedente. La forma di queste orbite può far tornare alla mente quella dei collapse and revival di cui si è parlato al Cap. 2.

Il campo in cavità produce un meccanismo di memoria durante l’ingresso di atomi successivi: si rammenti il significato di  $\phi_j$  e di  $\dot{\phi}_j$ : rispettivamente l’angolo di rotazione del vettor di Bloch dell’atomo  $j$ -esimo e la sua velocità angolare. La continuità del campo equivale attraverso la Eq. (2.60) a chiedere che  $\dot{\phi}_j(j)$  sia continuo rispetto a  $t''$ , ovvero che il vettor di Bloch dell’atomo

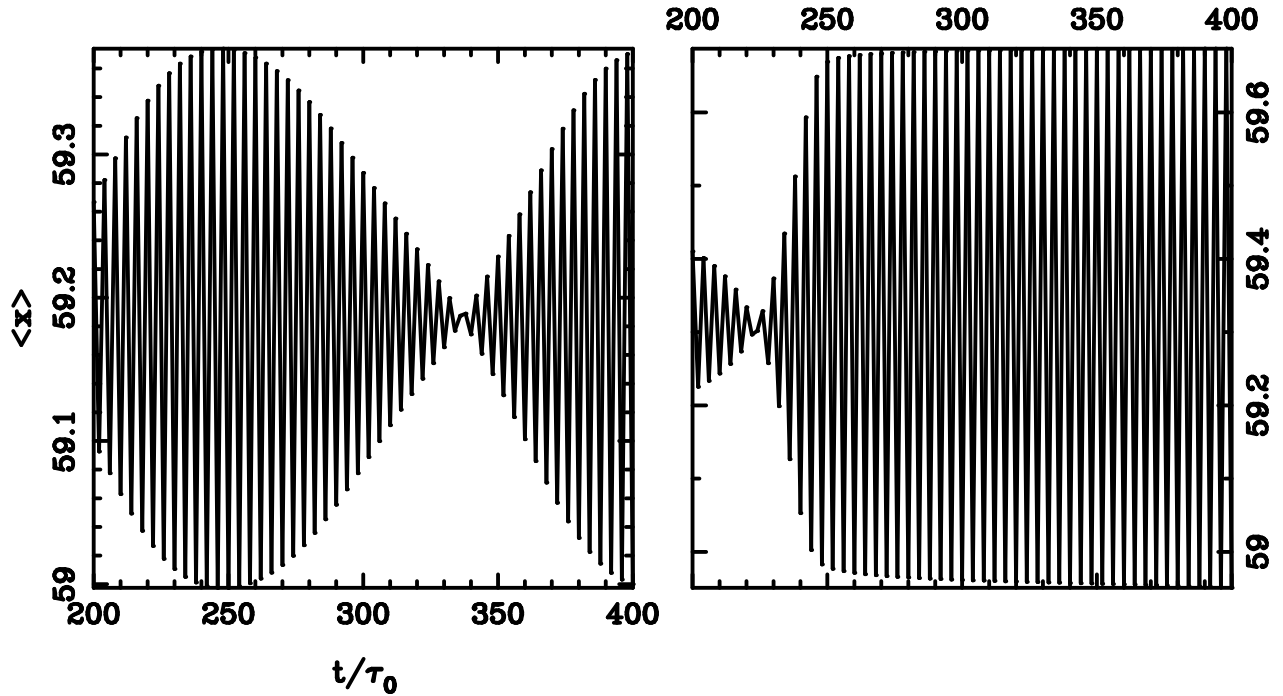


Figura 3.17: Orbite quasi periodiche per due valori successivi del parametro di pompa (120 e 138) nel caso illustrato in Fig. (??).

$j$ -esimo inizi a ruotare con la stessa velocità angolare con cui è uscito l'atomo  $(j - N)$ -esimo.

Perciò, attraverso il campo in cavità, il sistema conserva memoria del passaggio degli atomi. In questo senso si può parlare di effetti 'cooperativi nel tempo' che accumulandosi portano prima ad una dinamica instabile, ma organizzata, e poi ad una transizione di fase.

Anche per  $N = 2$  si ha un salto che è effetto di memoria con accumulazione di campo in cavità, e il fenomeno questa volta è meno brusco (Fig. (??)) che per  $N = 1$ . Per  $\Theta \simeq 141$  il sistema salta dalla radice della (2.77)

che vale circa  $x \simeq 59.3$  a radici più alte. La transizione che avviene non è netta, ed il sistema continua ad oscillare tra punti di periodo 2 e tra attrattori quasi periodici (si veda la Fig. (3.18) per la evoluzione del sistema a  $\Theta = 160$ ). Per  $\Theta$  che va da 178.3 a 190.7 il sistema sembra stabilizzarsi attorno ad un punto di periodo 2 con  $x \simeq 75$ , per poi riprendere il proprio comportamento multistabile. Non è chiaro se ci siano relazioni tra il periodo 2 delle orbite ed il numero  $N = 2$  degli atomi: occorreranno verifiche con  $N$  variabile (molto dispendiose in termini di tempo di calcolo per  $N$  grandi, se si considera che il tempo di integrazione è proporzionale ad  $N^2$ ). Sembra comunque evidente che aumentando il numero di atomi cavità si favoriscano effetti cooperativi nel tempo che danno luogo ad una dinamica organizzata. Per quanto riguarda il particolare valore  $\Theta_c$  per cui avviene la transizione, ci sono indizi che fanno pensare ad una dipendenza analitica di  $\Theta$  da  $N_{ex}^2$ . Per diversi valori di  $\Theta$  ed  $N$  si è considerata una condizione iniziale  $x_0$  situata all'incirca a metà dell'insieme delle soluzioni condizionatamente stabili della (2.77). Fissando  $N_{ex}$  si è poi fatto evolvere il campo per diversi valori di  $\Theta$  e si è visto che transizioni simili a quelle di Fig. (3.15) e (??) si verificano appunto per  $\Theta \propto (N_{ex})^2$ .

Si potrebbe pensare che la transizione avvenga a seguito di un aumento brusco del numero di radici dell'Eq. (2.77), ma si può verificare che questo numero è funzione continua di  $\Theta$ , con le radici distanziate tra loro di circa  $\pi$ .

Un'altra ipotesi che si potrebbe fare è quella che la transizione dinamica

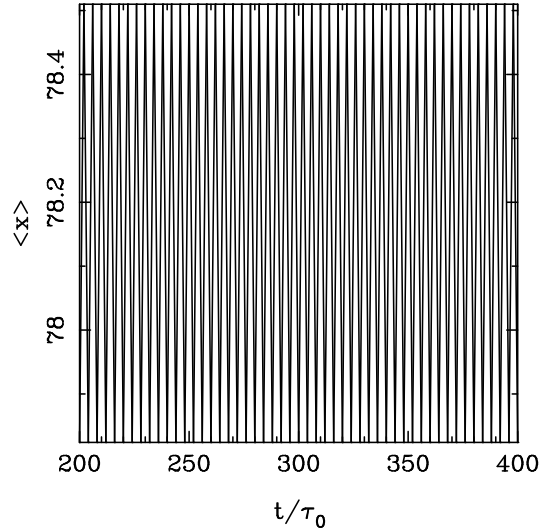


Figura 3.18: Evoluzione dinamica stroboscopica del campo per  $N = 2$ ,  $N_{ex} = 50$ ,  $x_0 = 58$  e  $\Theta = 160$ .

verso l'attrattore sia guidata dalle fluttuazioni: monitorando i valori di  $\sigma_x^2$  si osserva che non sussistono variazioni di rilievo. Il fatto che  $\sigma_x^2$  resti comunque piccolo conferma comunque la bontà dell'equazione dei punti fissi.

In conclusione lo studio del micromaser ad iniezione regolare ed in approssimazione semiclassica ha rivelato una molteplicità di differenti comportamenti: dalla sequenza di Feigenbaum, a transizioni di fase, ad una dinamica multistabile. Il denominatore comune è la non linearità delle equazioni per il campo, che implica per questo un insieme di attrattori i cui dominî sono fittamente intrecciati. Il confronto tra i casi  $N = 1$  ed  $N = 2$  mostra le



novità introdotte nella dinamica dalla presenza di molti atomi in cavità con l'instaurarsi di meccanismi cooperativi nel tempo alla base dell'amplificazione del campo in una situazione fisica al confine tra il maser microscopico e quello ordinario.

# Capitolo 4

## Descrizione microscopico-quantistica e similitudine termodinamica

### 4.1 Introduzione

In questo capitolo si illustra una teoria quantistica per l'indagine degli stati stazionari del micromaser per flussi bassi ed iniezione poissoniana (si veda al Cap. 2), in previsione di futuri studi per flussi alti ed iniezione regolare. La presente teoria è basata sull'uso dell'equazione di Fokker-Planck, la quale conduce in maniera naturale ad una pittura interpretativa termodinamica.

Si procede attraverso i seguenti passi:

- i) derivazione dell'equazione di Fokker-Planck e del suo ambito di validità [26];
- ii) studio degli stati stazionari del sistema ed utilizzo del 'potenziale effettivo'  $V(\nu)$  [5, 26].

## 4.2 Equazione di Fokker-Planck

La master equation (2.19) per le componenti diagonali  $p_n$  della matrice densità degli stati del campo può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = J_{n-1} - J_n , \quad (4.1)$$

dove  $J_n$  è la corrente di probabilità tra stati con numero di fotoni  $n$  ed  $(n+1)$

$$J_n = g_n p_n - l_{n+1} p_{n+1} . \quad (4.2)$$

Qui  $g_n$  si può interpretare come velocità di guadagno per  $p_n$  ed  $l_n$  come velocità di perdita . L'espressione analitica per  $g_n$  ed  $l_n$  si ricava dal confronto con la (2.19)

$$g_n = \gamma n_b (n+1) + \gamma N_{ex} \beta_{n+1} , \quad (4.3)$$

$$l_n = \gamma (n_b + 1) n . \quad (4.4)$$

Poiché gli atomi sono iniettati in cavità nel loro stato eccitato, la corrente di probabilità fluisce da valori di  $n$  più bassi a valori più alti.

Nel limite del continuo, per numeri di fotoni  $n$  molto grandi, le differenze finite si riscrivono sotto forma di espansioni di Taylor. In particolare le (4.3) e (4.4) si esprimono espandendo la parte destra della (4.1) nel modo seguente

$$l(n+1)p(n+1, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial n^k} \right] l(n)p(n, t) . \quad (4.5)$$

Il teorema di Pawula [28] dice che l'espansione (4.5) va troncata al secondo ordine o ad ordine infinito; troncandola al second'ordine (si esaminerà in

seguito l'ambito di validità di questa approssimazione) si ha

$$\frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial n}[Q(n)p(n, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2}[G(n)p(n, t)] , \quad (4.6)$$

dove

$$Q(n) = g(n) - l(n) = \gamma n_b - \gamma n + \gamma N_{ex} \beta_{n+1} \quad (4.7)$$

$$G(n) = g(n) + l(n) = \gamma n_b + \gamma n + \gamma N_{ex} \beta_{n+1} + 2\gamma n_b n . \quad (4.8)$$

Benchè per giungere a questi risultati si sia fatto uso di una distribuzione di probabilità che non considera termini di interferenza—visto che ci si è concentrati sugli elementi diagonali della matrice densità—, la teoria ottenuta è quanto-meccanica. Infatti basta osservare che la (4.6) contiene un termine di diffusione ed uno di trasporto, ed il termine di diffusione è di natura prettamente quanto-meccanica, in quanto descrive l'evoluzione delle fluttuazioni (mentre quello di trasporto determina l'evoluzione dei valori medi).

Scalando la (??) con

$$t''' = \gamma t \quad \nu = \frac{n}{N_{ex}} \quad (4.9)$$

$$P(\nu, t) = N_{ex} p(\nu, t) , \quad (4.10)$$

si ha

$$\frac{\partial P(\nu, t''')}{\partial t'''} = -\frac{\partial}{\partial \nu}[q(\nu)P(\nu, t''')] + \frac{1}{2N_{ex}} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2}[g(\nu)P(\nu, t''')] , \quad (4.11)$$

dove

$$q(\nu) = \frac{n_b}{N_{ex}} - \nu + \sin^2 [\Theta(\nu + 1/N_{ex})^{1/2}] , \quad (4.12)$$

$$g(\nu) = \frac{n_b}{N_{ex}} + \nu + \sin^2 [\Theta(\nu + 1/N_{ex})^{1/2}] + 2n_b \nu . \quad (4.13)$$

Si verifica facilmente che la  $P(\nu, t''')$  è normalizzata

$$\int_0^\infty d\nu P(\nu, t''') = 1 . \quad (4.14)$$

La validità della (4.11) si può verificare ricordando come questa equazione è stata ricavata. Innanzitutto  $\nu = n/N_{ex}$  deve rappresentare una variabile quasi-continua e dunque, siccome  $n$  è discreta, deve valere

$$N_{ex} \gg 1 . \quad (4.15)$$

In secondo luogo la dipendenza di  $p_{n+1}$  da  $p_n$  è equivalente all'espansione riscalfata

$$P(\nu + 1/N_{ex}) = P(\nu) + \frac{1}{N_{ex}} \frac{\partial P(\nu)}{\partial \nu} + \dots . \quad (4.16)$$

In essa il termine del primo ordine deve essere molto minore di  $P(\nu)$  affinché lo sviluppo (4.5) possa essere troncato al secondo ordine

$$\left| \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \nu} \right| \ll N_{ex} . \quad (4.17)$$

Questa espressione può essere riscritta, in termini della  $P(\nu)$  stazionaria (la cui espressione verrà ricavata in seguito)

$$P(\nu) = P(0) \left[ \frac{g(0)}{g(\nu)} \right] e^{-2N_{ex}V(\nu)} , \quad (4.18)$$

dove

$$V(\nu) = - \int_0^\nu d\nu' \frac{q(\nu')}{g(\nu')} . \quad (4.19)$$

Differenziando la (4.18) rispetto a  $\nu$  si ottiene

$$\left| \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \nu} \right| \simeq 2N_{ex} \frac{|q(\nu)|}{g(\nu)}. \quad (4.20)$$

Usando le (4.12) e (4.13) e passando al limite per  $1/N_{ex} \rightarrow 0$ ,  $n_b/N_{ex} \rightarrow 0$ , si ottiene, dalle (4.17) e (4.20)

$$\nu + 2n_b\nu + \sin^2(\Theta\sqrt{\nu}) \gg 2|\nu - \sin^2\Theta\sqrt{\nu}|. \quad (4.21)$$

Nel caso più stringente, ovvero quando il lato sinistro della disequazione è minimo e quello destro è massimo, si ottiene

$$n_b \gg \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

Dunque due condizioni devono verificarsi perché l'equazione di Fokker-Planck possa essere utilizzata. La prima è la (4.15), ovvero il numero medio di atomi che passano il cavità nel tempo di vita del fotone deve essere grande. Ciò, nell'ambito della teoria standard del maser, si traduce nella *rate equation* per  $\langle n \rangle$  [5] [8]

$$\langle \dot{n} \rangle = \gamma N_{ex} \sin^2 g \tau_{int} \sqrt{\langle n + 1 \rangle} - \gamma \langle n \rangle. \quad (4.23)$$

Le soluzioni stazionarie della (4.23) danno il numero medio di fotoni in cavità; annullando la derivata temporale si vede che, al di sopra della prima soglia del micromaser a  $\Theta = 1$ ,  $\langle n \rangle$  diventa circa uguale ad  $N_{ex}$ , a causa del bilanciamento fra guadagni e perdite. Ma allora anche per  $n$  dovrà valere una condizione come la (4.15)

$$n \simeq N_{ex} \gg 1, \quad (4.24)$$

e di conseguenza la sostituzione di  $n$  con  $(n \pm 1)$  non avrà alcuna influenza sulle espressioni per i coefficienti di guadagno e di perdita  $g_n$  ed  $l_n$  ed avrà senso il limite del continuo. Da queste considerazioni segue che la (4.15) può essere espressa anche richiedendo che l'argomento del  $(\sin^2)$  nelle espressioni per  $Q(n)$  e  $G(n)$  varî meno dell'unità quando  $n$  varia di 1; tenendo conto della (4.23), si ottiene

$$\frac{1}{2}\Theta\sqrt{\frac{n}{N_{ex}}}\frac{1}{n}\ll 1, \quad (4.25)$$

o equivalentemente

$$\Theta\ll\sqrt{nN_{ex}}\simeq N_{ex}. \quad (4.26)$$

La seconda condizione di validità per l'equazione di Fokker-Planck è la (4.22), che implica che le fluttuazioni termiche siano abbastanza importanti da impedire alla  $p_n$  di diventare troppo piccata: la probabilità di trovare  $n$  fotoni in cavità al tempo  $t$  avrà dunque variazione abbastanza debole da poter troncare lo sviluppo (4.5) al secondo ordine.

Si noti che le due approssimazioni descritte tendono a cancellare due delle conseguenze della natura quantistica dell'interazione tra il modo di radiazione e l'atomo a due livelli: la prima, i *Cummings revival* [14], i quali non possono verificarsi in presenza di smorzamento troppo accentuato; la seconda, ovvero l'instaurarsi di stati trappola (si veda la Sez. 2.1), rispetto ai quali il rumore termico fa da antagonista.

### 4.3 Stati stazionari e potenziale effettivo

Si passi ora all'analisi degli stati stazionari del campo. Annullando il primo membro della (4.11), si hanno le (4.18) e (4.19). Per definizione  $g(\nu) \geq 0$  su tutto l'intervallo  $(0, \infty)$ , e dunque  $P(\nu)$  è positiva definita e normalizzabile. La condizione  $n \gg 1$  per la validità dell'equazione di Fokker-Planck implica però che l'intervallo di integrazione per la  $P(\nu)$  sia  $(1, \infty)$  anziché  $(0, \infty)$ .

La Fig. (4.1) mostra il numero medio di fotoni normalizzato ad  $N_{ex}$  e la varianza definita dalla (2.22) per  $N_{ex} = 200$  ed  $n_b = 1$ . La linea tratteggiata è stata ottenuta utilizzando l'equazione di Fokker-Planck, la linea continua tramite la master equation. L'accordo tra le due è molto buono per tutti i valori di  $\Theta$ , tranne che per  $\Theta \simeq 0$  e  $\Theta > 10\pi$ , perché nel primo caso non vale più la condizione (4.15), nel secondo viene a cadere la (4.24). Se  $N_{ex} \rightarrow \infty$  l'accordo è molto buono, altrimenti peggiora per  $n_b \rightarrow 0$ . Questo risultato è una conferma della validità dell'equazione di Fokker-Planck. Benché le approssimazioni ed i limiti in cui la Fokker-Planck è valida tendono ad escludere due degli effetti tipicamente quantistici dell'interazione tra radiazione e materia, essa porta comunque a prevedere una statistica subpoissoniana della radiazione in cavità, carattere questo prettamente quantistico. Si ricordi che per  $N_{ex} \rightarrow \infty$  le soglie del micromaser sono assimilabili ad una transizione di fase (si veda la Sez. 2.2). Il paragone termodinamico si arricchisce utilizzando il potenziale effettivo  $V(\nu)$  (4.19), che dà infatti utili informazioni sul modo in cui la probabilità  $P(\nu)$  del numero di fotoni diviene a regime una



Figura 4.1: Confronto tra il numero medio di fotoni normalizzato ottenuto con la teoria microscopica esatta (linea continua) e la analisi di Fokker-Planck (linea tratteggiata). Idem per la deviazione standard normalizzata (secondo grafico).

funzione con molti picchi: infatti i massimi di  $P(\nu)$  si localizzano sui minimi del potenziale. Ponendo  $q(\nu) = 0$  (cioè  $\partial V/\partial \nu = 0$ ) si ha

$$\nu_0 = \sin^2 \left[ \Theta \left( \nu_0 + \frac{1}{N_{ex}} \right)^{1/2} \right] + \frac{n_b}{N_{ex}}, \quad (4.27)$$

che per  $N_{ex} \gg 1$  diventa

$$\nu_0 = \sin^2 \left[ \Theta \sqrt{\nu_0} \right]. \quad (4.28)$$

Per  $\Theta < 1$  si ha un minimo a  $\nu_0 = 0$ : il micromaser è sotto soglia. Per  $\Theta = 1$ ,  $\nu_0 = 0$  diventa un massimo locale: all'ordine più basso in  $(\Theta - 1)$  il minimo globale è

$$\nu_g = 3(\Theta - 1). \quad (4.29)$$

In prossimità della prima soglia del micromaser il numero di fotoni cresce dunque con continuità dallo zero.

Aumentando  $\Theta$ , aumenta il numero di soluzioni della (4.28): il minimo globale per un certo  $\Theta$  diviene locale e viene sostituito da un nuovo minimo globale. Questo processo è rappresentato in Fig. (4.2), dove  $V(\nu)$  è raffigurato per tre valori di  $\Theta$  (cioè 4 ,  $1.058 \times 2\pi$  ed 8) e rende ragione dell'avvicinarsi, al variare di  $\Theta$ , delle soglie successive alla prima. Infatti nel momento in cui un minimo globale si sostituisce al precedente ( $\nu = 0.647$  al posto di  $\nu = 0.167$  in figura), è chiaro dalla (4.18) che  $P(\nu)$  deve cambiare drasticamente. Da questo punto di vista la  $\sqrt{\nu}$  può essere considerato come il parametro d'ordine delle transizioni di fase del primo ordine in corrispondenza delle soglie. Per quanto riguarda l'evoluzione temporale del sistema il

Figura 4.2: Potenziale  $V(\nu)$  nel caso  $n_b = 0$  per i tre parametri di pompa (1)  $\Theta = 4$  , (2)  $\Theta = 2.116\pi$  , (3)  $\Theta = 8$ .

potenziale dà informazioni sulle scale temporali. Infatti, essendo  $V(\nu)$  dotato di minimi sia locali che globali, l'approccio della radiazione ai minimi sarà governato da due ordini di tempi. Si può dimostrare [5] che l'assestamento del sistema su di un minimo locale avviene in tempi  $t_l \simeq \gamma^{-1}$ , dell'ordine del tempo di smorzamento del campo in cavità. Invece il minimo globale viene raggiunto molto più lentamente, per tempi

$$t_g \simeq \gamma^{-1} e^{\alpha N_{ex}} , \quad (4.30)$$

dove  $\alpha \simeq 1$ . Se  $N_{ex} \gg 1$  il tempo di tunneling sarà talmente grande da causare una bistabilità del sistema, perché i suoi stati metastabili avranno vita molto lunga. Ciò significa che variando  $\tau_{int}$  abbastanza lentamente da far valere la

$$\frac{d\Theta}{dt} \ll \gamma , \quad (4.31)$$

la distribuzione del numero di fotoni rimarrà in equilibrio adiabatico al minimo dove si trova in quel momento, ed i valori di  $\Theta$  per cui si verificano le transizioni del primo ordine potranno differire in modo significativo da quelli previsti dalla teoria.

In Fig. (4.3) è mostrato un esempio in cui  $l = \langle n \rangle / N_{ex}$  è ottenuto mediante analisi numerica mentre  $\Theta$  viene fatto variare ciclicamente tra  $\Theta = \pi$  e  $\Theta = 4.4\pi$  in un tempo  $t = 80\gamma^{-1}$  per  $N_{ex} = 100$  ed  $n_b = 0.1$ . Si ha un ciclo di isteresi per il numero di fotoni che può essere interpretato sulla base della quantistica della radiazione. Le fluttuazioni della radiazione impediscono al

sistema di giungere ad uno stato stazionario autostato del numero portano invece (in tempi dell'ordine di  $\gamma^{-1}$ ) ad una distribuzione di probabilità  $p_n$  piccata attorno a tale autostato. Le fluttuazioni inoltre fanno balzare il campo tra i vari bacini di attrazione dei punti fissi della (4.11), ritardando il momento in cui il sistema raggiungerà un minimo globale di  $V(\nu)$ . Il calcolo

Figura 4.3: Isteresi nel numero normalizzato di fotoni quando  $\Theta$  viene fatto variare ciclicamente tra  $\Theta = \pi$  e  $\Theta = 4.4\pi$ .

delle due scale di tempi del sistema—calcolo che qui verrà esposto solo per sommi capi—si fa procedendo nel seguente modo. Per ricavare  $t_l$  si procede ipotizzando che la distribuzione iniziale di probabilità  $P(\nu_0, 0)$  sia piccata su uno dei minimi del potenziale effettivo  $\nu_m$ , e che vi rimanga per un tempo sufficientemente lungo da poter linearizzare i coefficienti di *drift* e di diffusione nell'intorno di  $\nu_m$  nell'equazione di Fokker-Planck (4.11). La soluzione dell'equazione linearizzata è una funzione [28] che, indipendentemente dalla

distribuzione iniziale, evolve verso una gaussiana centrata attorno a  $\nu_m$  in un tempo  $t_l$ .

Il tempo di assestamento sul minimo globale  $t_g$ , invece, si ottiene facendo uso della analisi di Kramers [29]. Il metodo si basa sul fatto che esiste sempre un cambiamento di funzione incognita della Fokker-Planck che porta ad un coefficiente di diffusione costante. A partire dal nuovo potenziale effettivo  $V'(y)$  della soluzione stazionaria, si calcola il tempo di tunneling del sistema da un minimo  $y_m$  ad un massimo  $y_M$ ; il tempo di tunneling approssima  $t_g$ .

Si noti che mentre la scala di tempi  $t_l$  rimane entro il limite di validità dell'approccio semiclassico  $t_{sc} < N_{ex}\gamma^{-1}$  [26], la scala di tempi  $t_g$  supera ampiamente tale limite: infatti l'evoluzione i minimi locali è essenzialmente semiclassica, mentre quella verso i minimi globali è regolata dalla diffusione del rumore quantistico.

# Capitolo 5

## Conclusioni

Il micromaser inteso come cavità che risuona con un solo modo della radiazione e nella quale vengono iniettati atomi a due livelli nello stato eccitato è un sistema particolarmente ricco di spunti per lo studio della natura quantistica del campo elettromagnetico. Sono stati previsti i collapse and revival, la statistica subpoissoniana dei fotoni in cavità e la creazione di stati numero. Il continuo miglioramento delle condizioni sperimentali ha permesso di verificare i primi due fenomeni, mentre per quanto riguarda gli stati trappola occorre ancora una metodologia efficiente di misurazione quantistica non demolitiva.

Dal punto di vista di uno studio semiclassico si sono fatte previsioni di dinamica estremamente ricca di fenomenologia. Si è visto che probabilmente il micromaser, anzichè assestarsi su punti fissi o periodici, nella maggior parte dei casi, soprattutto per valori alti del parametro di pompa  $\Theta$ , esibisce una dinamica altamente caotica o comunque multistabile. Al crescere della

costante di accoppiamento di dipolo elettrico aumenta il numero di attrattori per il campo, con i bacini di attrazione molto intrecciati e dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Al variare di  $\Theta$  si osservano transizioni al caos (per  $N \leq 1$ ) e transizioni di fase (per  $N \geq 1$ ) che avvengono per valori di  $\Theta$  molto al di sopra delle soglie ‘classiche’. Per spiegare questi comportamenti si è parlato di fenomeni cooperativi nel tempo tra gli atomi che entrano successivamente in cavità.

Se da un punto di vista semiclassico l’instabilità che caratterizza il sistema può essere attribuita alla non linearità delle equazioni che lo descrivono, da un punto di vista quantistico l’instabilità viene superata dalle fluttuazioni.

Per le soglie ‘classiche’ esiste una interpretazione termodinamica basata su una sorta di potenziale di Landau-Ginsburg: la separazione dei minimi nelle due categorie di locali e globali permette di prevedere fenomeni di bistabilità. Una analoga pittura termodinamica per le nuove soglie al caos è invece ancora assente. Occorrerà inoltre sviluppare una trattazione quantistica anche per il caso di flussi alti, per valutare le modificazioni indotte nel fenomeno dalla natura granulare della radiazione [30].

Lo studio del micromaser è attraente non solo per la varietà degli scenari che si possono presentare, ma anche per la molteplicità delle metodologie e degli approcci teorici coinvolti.

Esso pone problemi di fondamento riguardo le relazioni tra teorie classica, quantistica e termodinamica e suggerisce nuovi spunti per l’interpreta-

zione dei comportamenti di un sistema che da puro esercizio teorico quale era originariamente sta ora diventando luogo privilegiato per l'osservazione dell'interazione quantizzata tra radiazione e materia.



# Bibliografia

- [1] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [2] G. Rempe, H. Walther and N. Klein, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [3] D. Meschede, Phys. Rep. **211**, 201 (1992).
- [4] F. W. Cummings, A. K. Rajagopal, Phys. Rev. A **39**, 3414 (1989).
- [5] P. Filipowicz, J. Javanainen and P. Meystre, Phys. Rev. A **34**, 3077 (1986).
- [6] P. Meystre and E. M. Wright, in *Chaos, Noise and Fractals* edited by R. Pike and L. A. Lugiato (Hilger, Bristol, 1987), p.102.
- [7] R. Bonifacio (comunicazione privata).
- [8] Si veda, ad esempio, P. Meystre and M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics Second Edition* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1991).
- [9] F. W. Cummings, Phys. Rev. A **140**, 1051 (1965).
- [10] S. Stenholm, Phys. Rep. **6C**, 1 (1973).

- [11] P. Meystre, E. Geneux, A. Quattropiani and A. Faist, *Nuovo Cimento* **25B**, 521 (1975).
- [12] T. von Foerster, *J. Phys. A* **8**, 95 (1975).
- [13] P. L. Knight and P. W. Milonni, *Phys. Rep.* **66**, 21 (1980).
- [14] J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323 (1980).
- [15] G. Rempe, F. Schmidt-Kaler and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2783 (1990).
- [16] G. Rempe and H. Walther, *Phys. Rev. A* **42**, 1650 (1990).
- [17] G. Rempe, M. O. Scully and H. Walther, *Phys. Scripta* **T34**, 5\_13 (1991).
- [18] P. Filipowicz, J. Javanainen and P. Meystre, *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 906 (1986).
- [19] Si veda, ad esempio, H. Haken, *Synergetics: An Introduction* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1978).
- [20] L. A. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **36**, 740 (1987).
- [21] Si veda, ad esempio, L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Wiley, New York 1975).

- [22] L. Davydovich (comunicazione privata).
- [23] C. Grebogi, E. Kostelich, E. Ott and J. A. Yorke, *Physica D* **25**, 347 (1987).
- [24] G. M. D'Ariano, L. R. Evangelista and M. Saraceno, *Phys. Rev. A* **45**, 3646 (1992).
- [25] R. Bonifacio, G. M. D'Ariano, R. Seno and N. Sterpi, *Phys. Rev. A*, Rapid Communications. In corso di stampa, preprint number AZR458.
- [26] A. M. Guzman, J. Javanainen and E. M. Wright, *Phys. Rev. A* **40**, 2471 (1989).
- [27] R. V. Jensen and E. R. Jessup, *J. Stat. Phys.* **43**, 369 (1986).
- [28] Si veda, ad esempio, H. Risken, *The Fokker-Plank equation, Methods of Solution and Applications*, Vol. 18 di *Springer Series in Synergetics* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1984).
- [29] H. A. Kramers, *Physica (Utrecht)* **7**, 284 (1940).
- [30] C. W. Gardiner, A. S. Parkins and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **46**, 4363 (1992).