

Indice

1	Introduzione	3
2	Il metodo Monte-Carlo della funzione d'onda	8
2.1	Il metodo	8
2.1.1	Metodo di Mølmer, J. Dalibard e Y. Castin	10
2.1.2	Metodo di Dum, Zoller e Ritsch	17
2.2	Atomo a due livelli	22
2.3	Interpretazione fisica del metodo	30
2.4	Statistica ed estrapolazione	35
3	Il micromaser	39
3.1	Descrizione del sistema	39
3.2	Descrizione quantistica del Micromaser	42
3.2.1	Parametri principali del Micromaser	42
3.2.2	Iniezione atomica	43
3.3	Campo di radiazione nel micromaser ad un atomo	48

4	Simulazione della dinamica in un micromaser	59
4.1	Micromaser ad un atomo	59
4.2	Micromaser a cluster di atomi	65
5	Simulazione dell'operatore di Green del micromaser	72
5.1	Micromaser ad un atomo	72
5.2	Generalizzazione del metodo	85
6	Micromaser a molti atomi: simulazione del modello a cluster	88
6.1	Micromaser a cluster ad iniezione regolare	88
6.2	Micromaser ad iniezione di cluster Poissoniani	92
7	Conclusioni	110

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio di sistemi con dissipazione è uno dei problemi centrali dell'Ottica Quantistica. Generalmente questi sistemi vengono studiati con l'approccio della Master Equation [1] [2]. Il sistema viene descritto attraverso l'evoluzione della matrice densità ridotta, matrice ottenuta tracciando sullo spazio della riserva la matrice densità totale sistema-riserva. Integrando la Master Equation si ottiene l'evoluzione del sistema. Se il sistema ha un numero di gradi di libertà molto alto, l'integrazione diventa problematica sia analiticamente, a causa della presenza di più stati accoppiati, sia numericamente, a causa dei grandi tempi di calcolo necessari.

Nel 1992 K. Mølmer, Y. Castin e J. Dalibard, partendo dal problema di simulare il laser cooling [3], hanno costruito un metodo di simulazione della Master Equation basato sulla simulazione della evoluzione della funzione d'onda [4] (Monte-Carlo Wave Function Method). Gli stessi autori hanno poi applicato questo metodo a diversi problemi, mostrando la sua maggio-

re efficienza rispetto alla semplice integrazione della Master Equation [5]. Contemporaneamente, R. Dum, P. Zoller e H.Ritsch hanno formulato una versione equivalente del metodo [6], partendo dalla teoria della misura continua nella rivelazione di fotoni di Srinivas-Davies [7] e dalla teoria dello scattering di luce risonante di Mollow [8]. Questo metodo per la sua generalità ed efficienza ha conosciuto in questi anni un notevole successo ed è stato applicato ad un gran numero di sistemi (si veda per un parziale elenco delle applicazioni Ref.[3]).

Il metodo consiste nel far evolvere un insieme di N_s funzioni d'onda attraverso una Hamiltoniana non Hermitiana, opportunamente costruita, e scegliendo casualmente una serie di Quantum Jumps, che proiettano la funzione d'onda del sistema su un particolare stato. Si stima il valore di una assegnata osservabile con la relativa incertezza, mediando i valori di aspettazione calcolati per ogni funzione d'onda. La precisione con cui si stima il valore dell'osservabile è proporzionale a $1/\sqrt{N_s}$ e dipende dal tipo di operatore di cui si calcola il valore di aspettazione [5]. Quando la dimensione dello spazio di Hilbert è grande (chiamiamo N questa dimensione), si può ottenere una buona stima per il valore di aspettazione calcolando l'evoluzione di $N_s < N$ funzioni d'onda, che è equivalente a risolvere un sistema con $(N \cdot N_s)$ gradi di libertà, invece degli $(N \cdot N)$ richiesti dalla semplice risoluzione numerica della Master Equation. Questo fatto consente di ridurre notevolmente i tempi di calcolo e di avere comunque una buona stima del valore delle osservabili.

In questa tesi si applica il metodo Monte-Carlo della funzione d'onda al micromaser a cluster di atomi. Lo studio numerico del comportamento della radiazione in cavità con iniezione a molti atomi viene effettuato per la prima volta in questa tesi.

Il sistema studiato è il micromaser ad iniezione di cluster di atomi. Questo sistema è costituito da una cavità superconduttrice accordata alla frequenza delle microonde nella quale vengono immessi atomi di Rindberg con una frequenza di transizione risonante con un modo della cavità. Questi atomi sono eccitati da un laser impulsato abbastanza stretto in modo tale da poter considerare l'ingresso contemporaneo del gruppo di atomi eccitati da ogni singolo impulso (cluster). In questo modello, il periodo del laser è posto uguale al tempo di volo del cluster in cavità.

Il metodo Monte-Carlo viene applicato alla costruzione dell'operatore di Green che evolve la radiazione in cavità. Attraverso la diagonalizzazione di questo operatore viene poi calcolato lo stato stazionario della radiazione. Si calcola anche l'andamento del numero medio di fotoni e della varianza normalizzata nello stato stazionario al variare dell'angolo di Rabi per cavità con diversi rate di decadimento.

La simulazione ha fornito risultati del tutto inaspettati: si sono messi in evidenza sostanzialmente due diversi regimi. Il primo, per numero medio di atomi in cavità minore di N_{ex} (N_{ex} è il numero di atomi eccitati che entrano in cavità nel tempo di vita del fotone), in cui la radiazione si comporta in

modo simile al caso del micromaser ad un atomo ad iniezione Poissoniana [10]. In questo caso però, gli stati trappola [11], evidenti nel micromaser ad un atomo nel caso di temperatura nulla, vengono completamente cancellati dalla presenza di cluster a più atomi. Il secondo, per numero medio di atomi maggiore di N_{ex} , in cui il primo picco si sposta verso valori minori dell'angolo di Rabi e in cui si osserva la presenza di una nuova struttura a multipicchi.

Nel capitolo 2 viene descritto il metodo Monte-Carlo secondo l'approccio di Molmer [4] e quello di Zoller [6], e viene applicato ad un sistema semplice costituito da un atomo a due livelli interagente con radiazione classica in risonanza. La soluzione simulata viene confrontata con la soluzione analitica. Successivamente viene data una interpretazione fisica del metodo, applicandolo al caso dell'emissione spontanea in un atomo a due livelli. Nell'ultimo paragrafo si discute la dipendenza del metodo dal tipo di operatore considerato e si descrivono alcuni accorgimenti tecnici che consentono di ottimizzare i tempi di calcolo e di eliminare gli errori sistematici, dovuti al calcolo approssimato della evoluzione delle funzioni d'onda.

Nel capitolo 3 viene descritto il micromaser. Si dà una breve illustrazione dell'apparato sperimentale [12] [13] [14] e del modello microscopico-quantistico del micromaser ad un atomo con diversi meccanismi di pompaggio. Viene poi descritto il micromaser ad iniezione regolare di cluster di atomi Poissoniani. Infine, vengono descritte le caratteristiche del campo di radiazione per il micromaser ad un atomo.

Nel capitolo 4, il metodo Monte-Carlo viene applicato al micromaser, calcolando la dinamica del numero di fotoni e della inversione di popolazione durante il passaggio di un atomo e di un cluster di atomi in cavità.

Nel capitolo 5 si introduce il metodo dell'operatore di Green per il calcolo dello stato stazionario del micromaser ad un atomo. Si mostra come, applicando il metodo Monte-Carlo della funzione d'onda alla costruzione dell'operatore di Green del Micromaser, si riesca a calcolare in modo molto efficiente lo stato stazionario della radiazione. Questo metodo viene poi esteso al caso di un generico sistema ad evoluzione stroboscopica.

Nel capitolo 6, infine, si applica il metodo dell'operatore di Green al micromaser a cluster e si analizza il comportamento della radiazione in cavità per il caso di iniezione di cluster Poissoniani. Viene illustrato il comportamento del campo di radiazione per questo modello mostrando i risultati delle simulazioni.

Capitolo 2

Il metodo Monte-Carlo della funzione d'onda

2.1 Il metodo

La dinamica di un sistema fisico che dissipa energia viene generalmente trattata usando l'approccio della Master Equation [15]. La dinamica della matrice densità del sistema ρ_S è data, in questo contesto, dalla seguente equazione lineare:

$$\dot{\rho}_S = \frac{i}{\hbar}[\rho_S, H_S] + \mathcal{L}_{relax}(\rho_S) , \quad (2.1)$$

dove H_S è l'Hamiltoniana del sistema isolato mentre $\mathcal{L}_{relax}(\rho_S)$ è l'operatore di rilassamento che agisce sulla matrice densità ridotta ρ_S . La classe di operatori $\mathcal{L}_{relax}(\rho_S)$ che vengono presi in considerazione è la seguente:

$$\mathcal{L}_{relax}(\rho_S) = -\frac{1}{2} \sum_m (C_m^\dagger C_m \rho_S + \rho_S C_m^\dagger C_m) + \sum_m C_m \rho_S C_m^\dagger , \quad (2.2)$$

dove C_m sono operatori che agiscono nello spazio del sistema isolato. Nel ricavare la (2.1) si sono introdotte due importanti approssimazioni: l'appros-

simazione di Born e l'approssimazione di Markoff [2]. La prima consiste nel supporre che l'accoppiamento sistema-riserva sia sufficientemente debole cosicchè si possa considerare valido lo sviluppo di Born al secondo ordine dell'equazione di Schrödinger della matrice densità. La seconda approssimazione consiste nel supporre che il sistema sia Markoffiano, cioè che lo stato del sistema non dipenda dalla sua storia passata. Questa assunzione è ragionevole se si pensa alla riserva come ad un sistema a banda larga all'equilibrio termico: la fluttuazione indotta dal sistema sulla riserva termalizza rapidamente e non influisce ulteriormente sulla dinamica del sistema. In altri termini, la memoria dell'evoluzione precedente del sistema, contenuta nella modificazione dallo stato di equilibrio della riserva, viene cancellata rapidamente dalla termalizzazione.

La forma della Master Equation scritta nelle equazioni (2.1, 2.2) è generale. Infatti, è stato dimostrato da G.Lindblad [16] che tutte le Master Equations "valide" (ovvero che conservano la traccia, la positività e le combinazioni lineari convesse) hanno sempre questa forma.

L'integrazione della Master Equation non sempre è possibile: infatti, integrare la Master Equation per un sistema con N gradi di libertà equivale a integrare un insieme di $N \times N$ equazioni accoppiate che, per sistemi a molti gradi di libertà, può risultare praticamente impossibile, anche numericamente, a causa dei grandi tempi di calcolo necessari.

Il metodo qui proposto migliora in parte la situazione: infatti, il problema

viene affrontato studiando l'evoluzione della funzione d'onda del sistema. Perciò, poichè occorre determinare solo l'evoluzione degli N coefficienti che descrivono la funzione d'onda sulla base data, la dimensionalità del problema si riduce alla dimensione N dello Spazio di Hilbert. Tenuto conto che si devono calcolare un certo numero n di evoluzioni per poter stimare con una precisione dell'ordine di $1/\sqrt{n}$ il valore delle osservabili, si ottiene che il numero totale di equazioni da risolvere è $N \times n$, che per N abbastanza grande è molto minore di $N \times N$. Pertanto, si riescono a ridurre notevolmente i tempi di calcolo.

2.1.1 Metodo di Mølmer, J. Dalibard e Y. Castin

In questo paragrafo descriviamo il metodo Monte-Carlo della funzione d'onda nell'approccio proposto da K. Mølmer, J. Dalibard e Y. Castin [4] [5].

Si considera la funzione d'onda del sistema al tempo t $|\psi(t)\rangle$ e la si evolve per un intervallo di tempo δt abbastanza piccolo attraverso l'Hamiltoniana non Hermitiana:

$$H = H_S - \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m . \quad (2.3)$$

L'equazione di Schrödinger:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\psi(t)\rangle , \quad (2.4)$$

è equivalente all' equazione:

$$|\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\delta t\right)|\psi(t)\rangle . \quad (2.5)$$

Se δt è abbastanza piccolo allora la (2.5) può essere sviluppata al primo ordine attorno a t :

$$|\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle = \left(1 - \frac{iH\delta t}{\hbar}\right)|\psi(t)\rangle \quad (2.6)$$

Poichè H non è Hermitiana la funzione d'onda evoluta $|\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle$ non è più normalizzata. Il quadrato della sua norma è:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}(t + \delta t) | \tilde{\psi}(t + \delta t) \rangle &= \langle \psi(t) | \left(1 + \frac{iH^\dagger \delta t}{\hbar}\right) \left(1 - \frac{iH \delta t}{\hbar}\right) | \psi(t) \rangle \\ &= 1 - \delta p, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove δp è dato, trascurando i termini in $(\delta t)^2$, da:

$$\delta p = \delta t \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | H - H^\dagger | \psi(t) \rangle \quad (2.8)$$

$$= \delta t \sum_m \langle \psi(t) | C_m^\dagger C_m | \psi(t) \rangle \quad (2.9)$$

$$= \sum_m \delta p_m, \quad (2.10)$$

con $\delta p_m \geq 0$ per ogni m .

La scelta dell'intervallo di tempo δt deve essere fatta in modo tale che lo sviluppo al primo ordine (2.6) sia valido; questo in generale implica che $\delta p \ll 1$.

Dopo aver calcolato l'evoluzione della funzione per un tempo δt , si procede verificando se al tempo $t + \delta t$ vi sia o meno un *quantum jump*, cioè se il sistema perda o meno un quanto di energia (es: fotone) durante l'evoluzione. Questa verifica viene fatta estraendo un numero casuale ϵ da una distribuzione uniforme compresa tra 0 e 1 e confrontando questo numero con δp .

Se

$$\delta p \leq \epsilon ,$$

non si verifica nessun *quantum jump* e la funzione d'onda viene rinormalizzata:

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \frac{|\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle}{\| |\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle \|} . \quad (2.11)$$

Se invece:

$$\delta p > \epsilon ,$$

allora si verifica un *quantum jump* a la funzione d'onda viene ridotta da uno degli operatori C_m scelto con probabilità:

$$\Pi_m = \frac{\delta p_m}{\delta p} . \quad (2.12)$$

La funzione d'onda diventa:

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = \frac{C_m |\psi(t)\rangle}{\| C_m |\psi(t)\rangle \|} . \quad (2.13)$$

In figura 2.1, viene mostrata l'evoluzione della probabilità di eccitazione di un sistema atomico a due livelli interagente con radiazione classica in risonanza con la frequenza di transizione. Le discontinuità sono dovute al verificarsi di un quantum jump, che proietta la funzione d'onda sul livello fondamentale.

L'interpretazione fisica della procedura descritta sarà data nel paragrafo (2.3).

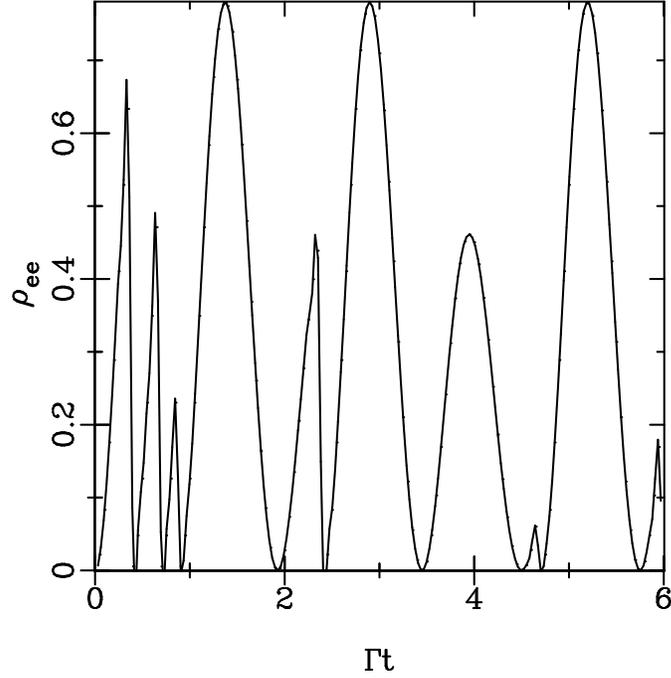


Figura 2.1: In questa figura si mostra l'evoluzione della probabilità per lo stato eccitato di un atomo a due livelli interagente con radiazione laser in risonanza. Il calcolo è stato effettuato con $\delta t = 0.1$, $g/\Gamma = 10$ e $T=0$, dove Ω/Γ è la frequenza di Rabi del sistema riscalata con il rate di decadimento dell'atomo e T è la temperatura

Si dimostra ora che il metodo Monte-Carlo è equivalente alla Master Equation: si deve verificare che la media su n traiettorie di $\nu(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ per n che tende ad infinito coincida ad ogni t con la matrice densità ridotta $\rho_S(t)$, posto che coincidano a $t = 0$.

Si consideri la funzione d'onda $|\psi(t)\rangle$ al tempo t e al tempo $t + \delta t$ e si

calcoli $\nu(t + \delta t)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \nu(t + \delta t) = & (1 - \delta p) \frac{|\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle}{\|\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle\|} \frac{\langle\tilde{\psi}(t + \delta t)|}{\|\tilde{\psi}(t + \delta t)\rangle\|} \\ & + \delta p \sum_m \Pi_m \frac{C_m|\psi(t)\rangle}{\|C_m|\psi(t)\rangle\|} \frac{\langle\psi(t)|C_m^\dagger}{\|C_m|\psi(t)\rangle\|}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove si è tenuto conto del fatto che la funzione d'onda ha una probabilità δp di essere ridotta e una probabilità $(1 - \delta p)$ di essere rinormalizzata. Mediando sui valori di $\nu(t)$ ottenuti per le diverse evoluzioni si ha:

$$\bar{\nu}(t + \delta t) = \bar{\nu}(t) + \frac{i\delta t}{\hbar} [\bar{\nu}(t), H_S] + \delta t \mathcal{L}_{relax}(\bar{\nu}(t)), \quad (2.15)$$

che, al limite per δt che tende a zero, diventa:

$$\frac{d}{dt} \bar{\nu}(t) = \frac{i}{\hbar} [\bar{\nu}(t), H_S] + \mathcal{L}_{relax}[\bar{\nu}(t)]. \quad (2.16)$$

Questa equazione è identica alla Master Equation (2.1). Se si assume che $\rho_S(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ allora, poichè ρ_S e $\bar{\nu}(t)$ sono soluzioni dalla stessa equazione differenziale ed hanno la stessa condizione iniziale, per l'unicità della soluzione della (2.16), coincidono necessariamente per ogni t . Questo dimostra l'equivalenza dei due approcci. Si noti che questa dimostrazione è indipendente dal particolare valore dell'intervallo di tempo δt scelto per l'evoluzione.

Affinchè il metodo dia risultati corretti, la scelta del time step deve comunque soddisfare alcune condizioni essenziali:

i) deve valere la condizione

$$\nu_i \delta t < 1,$$

dove $\hbar\nu_i$ sono le separazioni tra i livelli di H_s . Questa condizione afferma che il limite superiore per la scelta di δt diminuisce all'aumentare delle frequenze proprie del sistema;

ii) si deve avere $\delta p \ll 1$, che corrisponde alla condizione $\Gamma\delta t \ll 1$, dove Γ è il rate di rilassamento implicito nelle definizioni degli operatori C_m (si vedano gli esempi successivi);

iii) δt deve essere molto più grande dei tempi di correlazione τ_c della riserva (per l'approssimazione di Markoff) e, ovviamente, molto più piccolo del tempo totale di integrazione.

La condizione (*i*) può essere interpretata considerando un sistema a due livelli con frequenza di transizione w_S interagente con un campo elettrico monocromatico a frequenza w_F . In questo caso $|\nu_i|$ sono dell'ordine di Ω e δ , dove Ω è la frequenza di Rabi e $\delta = \omega_S - \omega_F$ è il detuning. Le condizioni precedenti diventano:

$$\delta t < \Omega^{-1}, \Gamma^{-1}, \delta^{-1} .$$

dove per un sistema con Ω grande la funzione d'onda oscilla rapidamente: perciò, affinché lo sviluppo al primo ordine (2.6) sia ancora valido, è necessario prendere un δt sufficientemente piccolo.

Nota la matrice densità ad un certo istante t , è possibile calcolare il valore medio di qualsiasi osservabile \hat{A} attraverso la seguente definizione:

$$a(t) = \langle \hat{A} \rangle(t) = \text{Tr}[\hat{\rho}_S(t)\hat{A}] \quad (2.17)$$

Il valore di queste osservabili può essere ricavato con il metodo Monte-Carlo procedendo come segue:

- si simulano un certo numero N di evoluzioni $|\psi_i(t)\rangle$;
- si valuta la media quantistica dell'operatore \hat{A} per ciascuna di queste evoluzioni

$$a_i(t) = \langle \psi_i(t) | \hat{A} | \psi_i(t) \rangle ,$$

- si media sul numero di evoluzioni:

$$\langle \hat{A} \rangle_{(n)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \psi_i(t) | \hat{A} | \psi_i(t) \rangle . \quad (2.18)$$

Per n sufficientemente grande si ha che $\rho_S \simeq \bar{\nu}(t)$, e quindi, usando la (2.1.1) si ottiene:

$$\langle \hat{A} \rangle_n(t) \simeq \langle \hat{A} \rangle(t) .$$

Il metodo qui proposto ha il pregio di essere molto semplice e facilmente implementabile sul calcolatore. Esso presenta comunque alcuni problemi di carattere numerico. Infatti, per time step δt molto piccoli, ($\Gamma \delta t$ dell'ordine di 10^{-4} , 10^{-5}), il metodo non converge correttamente. In teoria, per piccoli valori di δt , si dovrebbe ottenere un risultato più preciso perchè la funzione d'onda viene fatta evolvere al primo ordine. In pratica però, poichè ogni rinormalizzazione della funzione d'onda introduce un errore che si propaga durante la successiva evoluzione, se il numero di queste rinormalizzazioni diventa molto alto, l'errore numerico indotto diventa importante. Inoltre, per

δt piccoli, i valori del parametro ϵ utili affinché si verifichi un *quantum jump* sono confinati in un intervallo molto piccolo (nel nostro caso $[0, 10^{-4,-5}]$) e con questa risoluzione occorre disporre di una distribuzione dei numeri casuali rigorosamente uniforme su piccoli intervalli.

Questo metodo si generalizza al caso di stato $\rho(0)$ misto scegliendo casualmente lo stato puro da cui iniziare a simulare l'evoluzione della funzione d'onda. Tale scelta deve essere fatta in accordo con la distribuzione di probabilità degli stati che compongono la miscela.

2.1.2 Metodo di Dum, Zoller e Ritsch

È stata proposta da R.Dum, P.Zoller e H. Ritsch [6] una diversa versione di questo metodo, sviluppata sulle basi della teoria della misura continua di Srinivas e Davies [7]. La procedura che si ricava da questo approccio è del tutto equivalente alla precedente, con l'unica differenza che la funzione d'onda viene fatta evolvere senza essere continuamente rinormalizzata. La funzione d'onda risulta normalizzata solo quando si ha un quantum jump.

Per semplicità consideriamo il caso di un solo operatore $C_m \equiv C$. La Master Equation:

$$\frac{d}{dt}\rho_S = -i(H\rho_S - \rho_S H^\dagger) + C_m\rho_S C_m^\dagger \quad (2.19)$$

con H data dalla (2.3), viene riscritta come equazione per la matrice densità "condizionata" $\rho_S^{(n)}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\rho_S^{(n)} = -i(H\rho_S^{(n)} - \rho_S^{(n)} H^\dagger) + C_m\rho_S^{(n-1)} C_m^\dagger (1 - \delta_{n0}), \quad (2.20)$$

dove $\rho_S^{(n)}(t)$ è la matrice densità con la condizione che siano avvenuti n *quantum jumps*. La matrice densità incondizionata è data da:

$$\rho_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(t) \rho_S^{(n)}(t) , \quad (2.21)$$

dove $P^{(n)}(t)$ è la probabilità che siano avvenuti n jumps. La soluzione per il sistema di equazioni a “cascata” 2.20 può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} \rho_S^{(0)}(t) &= S_{t,0} \rho_S(0) \\ \rho_S^{(n)}(t) &= \int_0^t dt' S_{t,t'} J \rho_S^{(n-1)}(t') , \end{aligned} \quad (2.22)$$

dove la *funzione di Green S* della parte omogenea della (2.20) è definita come:

$$S_{t,t'} \rho_S^{(n)}(t') = U_{t,t'} \rho_S^{(n)}(t') U_{t,t'}^\dagger , \quad (2.23)$$

con $U_{t,t'}$ uguale all'operatore di evoluzione temporale non Hermitiano dell'equazione di Schrödinger:

$$U_{t,t'} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t')\right) , \quad (2.24)$$

e il termine di sorgente J che descrive il quantum jump è:

$$J \rho_S^{(n-1)}(t') = C \rho_S^{(n-1)}(t') C^\dagger , \quad (2.25)$$

dove C è un operatore nello spazio del sistema. (Qui si suppone che il quantum jump avvenga su un solo modo. La generalizzazione a più modi verrà trattata successivamente.)

Iterando la (2.22) si ricava per ($n \geq 1$):

$$\rho_S^{(n)}(t) = \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 S_{t,t_n} J S_{t_n,t_{n-1}} \cdots J S_{t_1,0} \rho_S(0) \quad (2.26)$$

In pratica la matrice densità è fatta evolvere fino al tempo t_1 dove si ha il primo quantum jump. Quindi viene ridotta dall'operatore J , nuovamente fatta evolvere fino a t_2 e via di seguito. La matrice densità condizionata $\rho_S^{(n)}$ è data dalla somma di tutte queste possibili evoluzioni, in altri termini, dalla somma di tutte le possibili sequenze t_1, t_2, \dots, t_n di quantum jumps.

Dalla matrice densità così calcolata si possono ottenere le $P^{(n)}(t)$ come segue:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(t) &= \text{Tr}_S[S_{t,0} \rho_S(0)] \quad (2.27) \\ P^{(n)}(t) &= \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \text{Tr}_S[S_{t,t_n} J S_{t_n,t_{n-1}} \cdots J S_{t_1,0} \rho_S(0)] , \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\rho_S(0) \equiv \rho_S^{(0)}(0)$. L'argomento degli integrali della (2.27) è la densità di probabilità $p_{(0,t)}(t_1, \dots, t_n)$ che si verificano esattamente n quantum jumps ai tempi t_1, t_2, \dots, t_n . Le probabilità condizionate che dati $n = 1, 2, \dots$ quantum jump il successivo jump si verifichi al tempo t è:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(t|t_n, \dots, t_1) &= \frac{\text{Tr}_S[S_{t,t_n} J S_{t_n,t_{n-1}} \cdots J S_{t_1,0} \rho_S(0)]}{\text{Tr}_S[J S_{t_n,t_{n-1}} \cdots J S_{t_1,0} \rho_S(0)]} \\ &= \frac{p_{(0,t)}(t_1, \dots, t_n, t)}{p_{(0,t)}(t_1, \dots, t_n)} , \quad (2.28) \end{aligned}$$

per ($n \geq 1$), mentre per $n = 0$ si ha:

$$\tilde{c}(t) = \text{Tr}_S[J S_{t,0} \rho_S(0)] .$$

Se lo stato iniziale del sistema è puro, cioè $\rho_S(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$, la matrice densità (2.21) può essere scritta in termini delle funzioni d'onda del sistema:

$$\psi(t_n|t_{n-1}, \dots, t_1) \in \mathcal{H}_S.$$

Si verifica facilmente, in questo caso, che la probabilità che si abbia un quantum jump nell'intervallo di tempo $[t_n, t)$ è uguale alla variazione della norma in questo intervallo di tempo, ovvero:

$$\int_{t_n}^t dt' \tilde{c}(t/t_n, \dots, t_1) = 1 - \frac{\| |\psi(t/t_n, \dots, t_1)\rangle \|^2}{\| |\psi(t_n/t_n, \dots, t_1)\rangle \|^2}. \quad (2.29)$$

La procedura da seguire per la simulazione può essere così riassunta.

(i) Si fissa uno stato iniziale per la funzione d'onda; tipicamente si tratta di uno stato puro, ma può essere anche una miscela (vedi 2.1.1).

(ii) Si genera un parametro random ϵ e si integra l'equazione di Schrödinger fino al successivo *quantum jump* determinato dalla condizione:

$$\int_{t_n}^t d\tau \tilde{c}(t/t_n, \dots, t_1) = 1 - \| |\tilde{\psi}(t)\rangle \|^2 = \epsilon, \quad (2.30)$$

dove $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ è la funzione d'onda del sistema al tempo t (la $\tilde{}$ indica che $|\psi(t)\rangle$ non è normalizzata). Quando la variazione della norma della funzione d'onda diventa uguale al parametro ϵ si ha un quantum jump.

(iii) A questo punto la funzione d'onda viene ridotta e normalizzata, analogamente a quanto fatto nella (2.13):

$$|\psi(t)\rangle = \frac{C|\tilde{\psi}(t)\rangle}{\| C|\tilde{\psi}(t)\rangle \|}. \quad (2.31)$$

Nel caso in cui il *quantum jump* avvenga su più modi, si definiscono diversi operatori di sorgente:

$$J_m \rho_S^{(n-1)}(t) = C_m \rho_S^{(n-1)}(t) C_m^\dagger ,$$

e si sceglie il modo sul quale si ha *quantum jump* secondo la distribuzione di probabilità:

$$D_m(t) = \frac{\Pi_m(t)}{\sum_m \Pi_m(t)} ,$$

con:

$$\Pi_m(t) = \frac{\text{Tr}_S[J_m S_{t,0} \rho_S(0)]}{\text{Tr}_S[S_{t,0} \rho_S(0)]} . \quad (2.32)$$

La riduzione avviene sul modo prescelto come nella (2.31) sostituendo C con l'operatore relativo a questo modo. Si può dimostrare, con un po' di algebra, che la distribuzione di probabilità qui ricavata è la stessa che si ha con la (2.12).

Dopo aver operato la riduzione e la normalizzazione della funzione d'onda, si riparte dal punto (ii) e si ripete la procedura descritta fino alla fine dell'evoluzione.

Per valutare l'evoluzione del valore medio di un generico operatore \hat{A} si usa la (2.18), ricordando che, per ottenere una stima corretta del valore dell'osservabile ad un generico tempo t , è necessario normalizzare la funzione d'onda $|\tilde{\psi}_i(t)\rangle$.

2.2 Atomo a due livelli

In questo paragrafo si risolve analiticamente la Master Equation per un sistema fisico costituito da un atomo a due livelli interagente con radiazione laser classica in risonanza con la frequenza di transizione. Si confronta poi la soluzione con i risultati forniti dalla simulazione, verificando l'accordo tra i due diversi approcci.

Si consideri la Master Equation (2.1), dove l'operatore di rilassamento \mathcal{L}_{relax} è, in questo caso, così definito:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{relax}(\rho_S) = & -\frac{1}{2}\gamma_{\parallel}(1-s)[\sigma_+\sigma_-\rho_S + \rho_S\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho_S\sigma_+] \\ & -\frac{1}{2}\gamma_{\parallel}(s)[\sigma_-\sigma_+\rho_S + \rho_S\sigma_-\sigma_+ - 2\sigma_+\rho_S\sigma_-] \\ & -\frac{1}{4}(2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel})[\rho_S - \sigma_z\rho_S\sigma_z], \end{aligned} \quad (2.33)$$

mentre l'Hamiltoniana di interazione H_S è:

$$H_S = -\frac{\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-]. \quad (2.34)$$

L'Hamiltoniana H_S è da intendersi nello schema di interazione con l'Hamiltoniana libera $H_0 = \hbar\omega_{eg}\sigma_+\sigma_-$, che annulla la dipendenza temporale del campo elettrico classico in risonanza. La radiazione laser viene trattata classicamente, mentre il sistema atomico è trattato con il formalismo quantistico. In queste equazioni σ_+ e σ_- sono le matrici di Pauli $\sigma_+ = (\sigma_x + i\sigma_y)/2$ e $\sigma_- = (\sigma_x - i\sigma_y)/2$, Ω è la frequenza di Rabi del sistema e ω_{eg} è la frequenza di transizione tra i due livelli atomici. Si deve ancora chiarire il significato

dei parametri $\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$ ed s . γ_{\parallel} , è il rate di decadimento per la popolazione dei livelli, cioè dei termini diagonali della matrice densità. Il valore di questo parametro aggrega gli effetti di decadimento dovuti sia all' emissione spontanea che agli urti anelastici tra gli atomi. γ_{\perp} è il rate di decadimento per la polarizzazione dell'atomo, cioè dei termini fuori diagonale della matrice densità. Questo parametro descrive oltre agli effetti già citati per il rate parallelo anche quello dovuto alle collisioni elastiche che, pur non influenzando sulla popolazione dei livelli, contribuisce al decadimento della polarizzazione atomica. I due parametri non sono indipendenti ma devono soddisfare la relazione $2\gamma_{\perp} \geq \gamma_{\parallel} \geq 0$ che, nel caso radiativo puro, cioè nel caso in cui siano trascurabili gli effetti dovuti alle collisioni, diventa: $2\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel}$. Il parametro s , chiamato *parametro di pompaggio*, è il rate della transizione dell'atomo dallo stato fondamentale allo stato eccitato che descrive fenomenologicamente un qualsiasi meccanismo di pompaggio (o anche di solo hopping termico). Lo stato di un sistema atomico a due livelli al generico tempo t è completamente descritto dalla funzione d'onda:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |g\rangle + \beta(t) |e\rangle, \quad (2.35)$$

appartenente ad uno spazio di Hilbert bidimensionale. La base scelta per descrivere tale evoluzione è costituita dai due autostati dell'energia del sistema relativi agli autovalori 0 e $\hbar\omega_{eg}$. La matrice densità al generico tempo t , per

sistemi che si trovano in uno stato puro, è definita nel seguente modo:

$$\rho_S(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Gli elementi di matrice dell'operatore densità hanno il seguente significato fisico:

$|\alpha|^2$ è la popolazione del livello fondamentale;

$|\beta|^2$ è la popolazione del livello eccitato;

$\alpha\beta^*$ e $\alpha^*\beta$ sono i termini di correlazione tra i due stati (coerenza).

Per un generico stato misto scriveremo:

$$\rho_S(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \xi \\ \xi^* & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

dove $|\xi| < |\alpha\beta^*|$.

Sostituendo nella Master Equation l'operatore densità in forma matriciale, si ottiene un insieme di 3 equazioni differenziali accoppiate che descrivono l'evoluzione degli elementi di matrice (l'equazione relativa all'evoluzione di ξ^* è la complessa coniugata di quella di ξ). Il sistema di equazioni è:

$$\frac{d}{dt} |\alpha|^2 = \frac{i\Omega}{2} [\xi^* - \xi] - \gamma_{\parallel} s |\alpha|^2 + \gamma_{\parallel} (1-s) |\beta|^2 \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt} |\beta|^2 = -\frac{i\Omega}{2} [\xi^* - \xi] - \gamma_{\parallel} (1-s) |\beta|^2 + \gamma_{\parallel} s |\alpha|^2 \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt} \xi = -\frac{i\Omega}{2} [|\alpha|^2 - |\beta|^2] - \frac{\gamma_{\parallel}}{2} \xi - \frac{1}{4} (2\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp}) \xi. \quad (2.40)$$

Questo sistema può essere ridotto ad un set di 2 equazioni differenziali accoppiate usando il vincolo:

$$\text{Tr}[\rho_S(t)] = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.41)$$

Applicando il seguente cambiamento di variabili:

$$S_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \quad \text{e} \quad S_y = i(\xi^* - \xi), \quad (2.42)$$

il sistema diventa:

$$\frac{d}{dt} S_z = \Omega S_y - \gamma_{\parallel} S_z + \gamma_{\parallel} (1 - 2s) \quad (2.43)$$

$$\frac{d}{dt} S_y = -\Omega S_z - \frac{\gamma_{\parallel}}{2} S_y - \frac{1}{4} (2\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp}) S_y. \quad (2.44)$$

Le variabili introdotte hanno un chiaro significato fisico: S_z non è altro che la differenza di popolazione tra i due livelli (inversione di popolazione), mentre S_y è la componente in quadratura della polarizzazione atomica. Nel formalismo della teoria di Bloch queste due variabili sono due componenti del vettore di Bloch.

E' possibile valutare la soluzione del sistema all'equilibrio (*stato stazionario*) annullando il valore delle derivate e risolvendo il sistema lineare così ottenuto. Si ricava:

$$S_z^{(\infty)} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\parallel}^2 (1 - 2s)}{\Omega^2 + \gamma_{\parallel} [\frac{\gamma_{\parallel}}{2} + \frac{1}{4} (2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel})]} + \frac{1}{4} \frac{\gamma_{\parallel} (2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}) (1 - 2s)}{\Omega^2 + \gamma_{\parallel} [\frac{\gamma_{\parallel}}{2} + \frac{1}{4} (2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel})]} \quad (2.45)$$

$$S_y^{(\infty)} = -\frac{\gamma_{\parallel} \Omega (1 - 2s)}{\Omega^2 + \gamma_{\parallel} [\frac{\gamma_{\parallel}}{2} + \frac{1}{4} (2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel})]}. \quad (2.46)$$

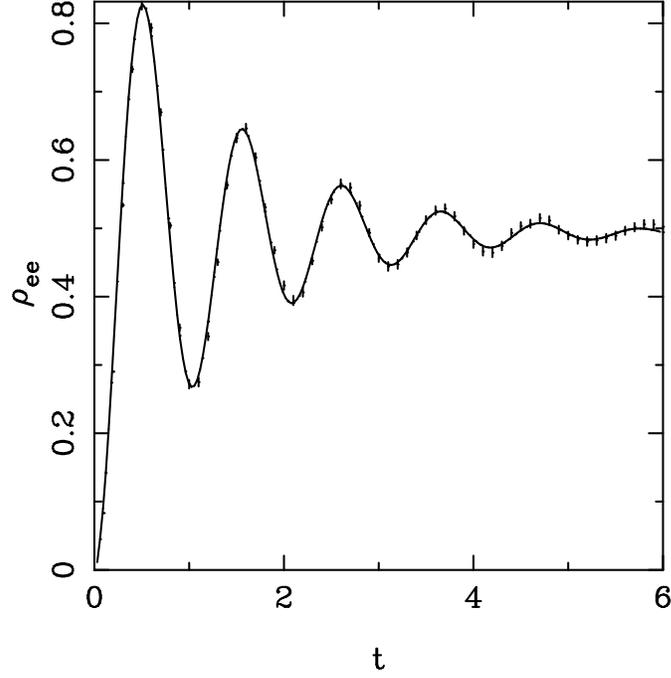


Figura 2.2: In questa figura si mostra l'evoluzione della popolazione dello stato eccitato per l'atomo a due livelli interagente con radiazione laser in risonanza. Sono confrontate la soluzione teorica con quella simulata ottenuta con 500 blocchi di 10 evoluzioni ciascuno, con $\delta t = 0.1$ con $\Omega/\Gamma = 6$ e a temperatura $T = 0$

Tali espressioni acquistano una forma funzionale semplice se si considera il caso in cui il pompaggio s è nullo e l'effetto degli urti è trascurabile (caso radiativo puro $\gamma_{\parallel} = 2\gamma_{\perp}$). In questo caso lo stato stazionario diventa:

$$S_z^{(\infty)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\Omega^2}{\gamma_{\parallel}^2}\right)} \quad (2.47)$$

$$S_y^{(\infty)} = -\frac{2\Omega}{\gamma_{\parallel}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\Omega^2}{\gamma_{\parallel}^2}\right)}, \quad (2.48)$$

in accordo con l'espressione della parte reale ed immaginaria della suscettività dielettrica dell'atomo a due livelli con "damping".

La dinamica del sistema può essere risolta esattamente. Si suppone che all'inizio dell'evoluzione il sistema si trovi nello stato fondamentale. La matrice densità a $t = 0$ è:

$$\rho_S(0) = |g\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

da cui si ricava che $S_z(0) = 1$ e $S_y(0) = 0$. Dalla (2.44) si ricava S_z in funzione di S_y e \dot{S}_y . Derivando ulteriormente entrambi i termini si ricava \dot{S}_z in funzione di \dot{S}_y e \ddot{S}_y . Sostituendo nella (2.43) si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine nella quale compaiono solo S_y e le sue derivate. Tale equazione, scritta in forma normale è:

$$\frac{d^2}{dt^2}S_y + 2\gamma\frac{d}{dt}S_y + \omega_0^2S_y = -\Omega_1^2 \quad (2.50)$$

con:

$$2\gamma = \frac{3}{2}\gamma_{\parallel} + \frac{1}{4}(2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}) \quad (2.51)$$

$$\omega_0^2 = \Omega^2 + \frac{\gamma_{\parallel}^2}{2} + \frac{\gamma_{\parallel}}{4}(2\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}) \quad (2.52)$$

$$\Omega_1^2 = \Omega\gamma_{\parallel}(1 - 2s). \quad (2.53)$$

Questa equazione è formalmente identica all'equazione di moto di un oscillatore armonico con un termine di "damping" e interagente con una forza costante. Risolvendo tale equazione con le condizioni iniziali:

$$S_y(0) = 0 \quad \dot{S}_y(0) = -\Omega, \quad (2.54)$$

e considerando il caso “sottodampato” $\omega_0 > \gamma$, si ottiene la soluzione esatta:

$$S_y(t) = S_y^{(\infty)} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[\cos(\omega t) + \left(\frac{\gamma \Omega_1^2 - \Omega \omega_0^2}{\omega \Omega_1^2} \right) \sin(\omega t) \right] \right\} \quad (2.55)$$

$$S_z(t) = S_z^{(\infty)} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[\left(1 - \frac{\Omega \omega_0^2}{\Omega_1^2 (2\gamma - \gamma_{\parallel})} \right) \cos(\omega t) + \left(\frac{(\gamma - \gamma_{\parallel})(\gamma \Omega_1^2 - \Omega \omega_0^2) - \omega^2 \Omega_1^2}{(2\gamma - \gamma_{\parallel}) \Omega_1^2 \omega} \right) \sin(\omega t) \right] \right\}, \quad (2.56)$$

dove ω è:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Si è simulata la dinamica di questo sistema nel limite radiativo e con pompaggio nullo, calcolando l'evoluzione della popolazione del livello eccitato. Come si vede dalla figura 2.2 l'accordo tra il risultato della simulazione e quello ottenuto risolvendo la Master Equation è molto buono. Si può dimostrare facilmente che il sistema simulato è equivalente ad un sistema a due livelli accoppiato con un bagno di oscillatori armonici a temperatura nulla e interagente con radiazione classica in risonanza. Il caso a temperatura $T \neq 0$, si ottiene come caso particolare del sistema discusso sopra. Infatti, l'operatore di rilassamento per $T \neq 0$ diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{relax}(\rho_S) = & -\frac{\Gamma}{2} [1 + n(\omega_0)] (\sigma_+ \sigma_- \rho_S + \rho_S \sigma_+ \sigma_- - 2\sigma_- \rho_S \sigma_+) \\ & -\frac{\Gamma}{2} n(\omega_0) (\sigma_- \sigma_+ \rho_S + \rho_S \sigma_- \sigma_+ - 2\sigma_+ \rho_S \sigma_-), \end{aligned} \quad (2.57)$$

dove Γ è il tempo di vita del livello eccitato mentre $n(\omega_0)$ è il numero medio di oscillatori eccitati alla temperatura T e alla frequenza di risonanza del

sistema a due livelli:

$$n(\omega_0) = \left(\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) - 1 \right)^{-1}. \quad (2.58)$$

Se si stabilisce la semplice corrispondenza:

$$\gamma_{\parallel} = \Gamma(2n(\omega_0) + 1) \quad s = \frac{n(\omega_0)}{2n(\omega_0) + 1}, \quad (2.59)$$

e si considera il caso radiativo puro ($2\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel}$) l'operatore (2.33) diventa uguale al (2.57).

Per simulare il presente modello occorre definire due modi indipendenti (vedi (2.1)):

$$C_1 = \sqrt{\Gamma(1 + n(\omega_0))}\sigma_- \quad (2.60)$$

$$C_2 = \sqrt{\Gamma n(\omega_0)}\sigma_+ \quad (2.61)$$

Il *quantum jump* associato a questi operatori corrisponde ad un decadimento per emissione spontanea o stimolata oppure ad una eccitazione dovuta all'assorbimento di un quanto di energia della riserva.

In figura 2.3 viene mostrato il sistema a due livelli nel caso di temperatura non nulla. In questa simulazione il numero medio di atomi eccitati per hopping termico è 0.5 e la frequenza di Rabi riscalata $\Omega/\Gamma = 10$. Si osserva che, anche in questo caso, l'accordo tra la soluzione analitica e la simulazione è molto buono. Le oscillazioni si smorzano rapidamente a causa delle maggiori fluttuazioni termiche e il sistema raggiunge rapidamente lo stato di equilibrio.

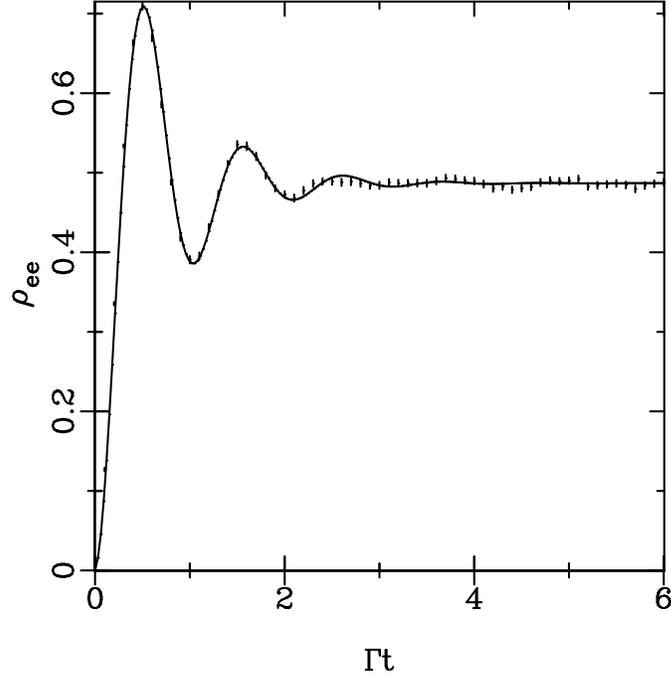


Figura 2.3: In questa figura si mostra l'evoluzione della popolazione dello stato eccitato per l'atomo a due livelli interagente con radiazione laser in risonanza. Sono confrontate la soluzione teorica con quella simulata ottenuta con 500 blocchi di 20 evoluzioni ciascuno, con $\delta t = 0.1$ con $\Omega/\Gamma = 6$ e con un numero medio di atomi eccitati termicamente $n(\omega_0) = 0.5$.

2.3 Interpretazione fisica del metodo

In questo paragrafo si discute il significato fisico del Metodo Monte-Carlo della funzione d'onda, applicando tale metodo ad un semplice modello. Si consideri un atomo a due livelli interagente con il bagno di oscillatori di punto zero del campo. Il sistema atomo-radiazione a $t = 0$ evolve dallo stato

iniziale:

$$|\psi(0)\rangle = (c_g|g\rangle + c_e|e\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (2.62)$$

allo stato:

$$|\psi(0)\rangle = (c'_g|g\rangle + c'_e|e\rangle) \otimes |0\rangle + \sum_{\lambda} c_{\lambda}|g\rangle \otimes |1_{\lambda}\rangle. \quad (2.63)$$

L'accoppiamento atomo-bagno di oscillatori fa evolvere lo stato popolandolo anche i livelli ad un fotone $|1_{\lambda}\rangle$. Wigner e Weisskopf hanno mostrato, attraverso una trattazione al secondo ordine nell'accoppiamento, che uno stato $|e\rangle$ accoppiato con un continuo a banda larga acquista uno shift (Lamb shift) e diventa instabile, cioè decade nel tempo [15].

La Master Equation di questo sistema a temperatura $T=0$ è:

$$\dot{\rho}_S(t) = -\frac{\Gamma}{2}(\sigma_+\sigma_-\rho_S + \rho_S\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho_S\sigma_+), \quad (2.64)$$

Si tratta ora questo sistema con il Metodo Monte-Carlo. Si consideri l'atomo a due livelli in uno stato di sovrapposizione a $t = 0$:

$$|\psi(0)\rangle = c_g|g\rangle + c_e|e\rangle. \quad (2.65)$$

La Hamiltoniana efficace di questo sistema è:

$$H = -\frac{i\hbar\Gamma}{2}|e\rangle\langle e|, \quad (2.66)$$

ottenuta definendo un operatore C come nella (2.61) e scrivendo gli operatori di Pauli nel seguente modo:

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e|. \quad (2.67)$$

Facendo evolvere la funzione d'onda per un tempo δt si ricava:

$$|\psi^{(1)}(\delta t)\rangle = c_g|g\rangle + c_e e^{-\frac{\Gamma\delta t}{2}}|e\rangle. \quad (2.68)$$

La probabilità δp di avere un quantum jump è:

$$\delta p = \Gamma|c_e|^2\delta t, \quad (2.69)$$

che corrisponde *alla probabilità di emissione di un fotone tra 0 e δt* . La funzione $|\psi^{(1)}(\delta t)\rangle$ non è altro che la componente a zero fotoni della funzione d'onda totale atomo+radiazione (2.63) e la differenza dalla norma unitaria, $1 - \langle\psi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle \simeq \Gamma|c_e|^2\delta t$ è la norma totale della rimanente componente ad un fotone con l'atomo nello stato fondamentale. La scelta del numero random simula il risultato della misura del numero di fotoni emessi tra 0 e δt , e il quantum jump è la proiezione della funzione d'onda sullo stato fondamentale $|g\rangle$, associata con la rivelazione di un fotone. Dopo questa proiezione, in assenza di radiazione laser, la funzione d'onda non ha ulteriori evoluzioni.

Se non c'è alcun quantum jump, la funzione d'onda normalizzata $|\psi(\delta t)\rangle$ è proporzionale a $|\psi^{(1)}(\delta t)\rangle$. Poichè δt è piccolo, la $|\psi(\delta t)\rangle$ può essere scritta nel seguente modo:

$$|\psi(\delta t)\rangle = c_g \left(1 + \frac{\Gamma\delta t}{2}|c_e|^2\right) |g\rangle + c_e \left(1 - \frac{\Gamma\delta t}{2}|c_g|^2\right) |e\rangle. \quad (2.70)$$

Si nota che c'è una piccola rotazione della funzione d'onda: l'ampiezza di probabilità dello stato fondamentale è aumentata mentre quella dello stato eccitato è diminuita. La parte non Hermitiana dell'evoluzione corrisponde

alla modificazione dello stato del sistema associato alla misura nulla del fotone emesso. L'informazione contenuta in un *esperimento a misura nulla* è stata trattata diffusamente da Dicke [17].

La rotazione dello stato in seguito alla misura nulla è essenziale. Se non ci fosse, ovvero, se si considerasse la funzione d'onda costante:

$$|\psi(\delta t)\rangle = |\psi(0)\rangle, \quad (2.71)$$

la probabilità di aver un quantum jump (cioè di rivelare un fotone) tra δt e $2\delta t$ sarebbe uguale a quella tra 0 e δt , e questo si ripeterebbe per ogni step dell'evoluzione fino a quando si avrebbe un quantum jump. Anche per $|c_e|^2$ molto piccoli, quindi, si potrebbe sempre trovare un fotone emesso tra $t = 0$ e $t = \infty$ e questo è chiaramente sbagliato. Grazie alla piccola rotazione, comunque, la probabilità di avere un quantum jump tra δt e $2\delta t$ è piccola e verrà ulteriormente ridotta se non vi sono quantum jump nei successivi intervalli di tempo. Supponendo che non vi sia stato alcun quantum jump tra 0 e t , noi possiamo scrivere $|\psi(t)\rangle$ come:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{c_g|g\rangle + c_e e^{-\frac{\Gamma t}{2}}|e\rangle}{\sqrt{|c_g|^2 + |c_e|^2 e^{\Gamma t}}}. \quad (2.72)$$

La probabilità $P(t)$ di non avere alcun quantum jump tra 0 e t soddisfa la seguente equazione:

$$\begin{aligned} P(t + \delta t) &= P(t)(1 - \langle \psi^{(1)}(\delta t) | \psi^{(1)}(\delta t) \rangle) \\ &= P(t) \left(1 - \frac{\Gamma \delta t |c_e|^2 e^{-\Gamma t}}{|c_g|^2 + |c_e|^2 e^{-\Gamma t}} \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Questa equazione ha come soluzione:

$$P(t) = |c_g|^2 + |c_e|^2 e^{-\Gamma t}. \quad (2.74)$$

La soluzione mostra che c'è una probabilità $|c_g|^2$ che non vi sia alcun quantum jump tra $t = 0$ e $t = \infty$.

Il Metodo Monte-Carlo risolve il problema di come possano n atomi tutti preparati a $t = 0$ nello stesso stato di sovrapposizione evolvere verso lo stato fondamentale $|g\rangle$ senza emettere n fotoni, emissione che violerebbe la conservazione dell'energia. La soluzione è che soltanto una frazione $|c_e|^2$ degli atomi decade per emissione di un fotone, la frazione di atomi rimanente corrisponde alla componente $c_g|g\rangle \otimes |0\rangle$ nella (2.63), cioè ad atomi che sono già nello stato fondamentale e che pertanto non possono emettere fotoni.

Si noti che *la misura è fatta sulla riserva e non sulle variabili del sistema*. Si può dire che quando i fotoni sono emessi dall'atomo non giocano più alcun ruolo nella sua successiva evoluzione e, pertanto, possono essere misurati e assorbiti. Questa misura, in accordo con le regole della meccanica quantistica, porta all'evoluzione descritta. Considerando la conseguente evoluzione delle medie di ensemble si ottiene una derivazione alternativa della Master Equation.

2.4 Statistica ed estrapolazione

In questo paragrafo si descrivono alcuni accorgimenti implementati nel programma di simulazione per soddisfare tre esigenze importanti:

- avere una stima dell'errore sul valore delle osservabili calcolate;
- minimizzare gli errori sistematici;
- ottimizzare i tempi di calcolo.

Il Metodo Monte-Carlo sopra descritto consente di valutare il valore medio di alcuni osservabili con la loro barra d'errore. Infatti, è possibile calcolare la varianza di un'osservabile A nel seguente modo:

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \psi_i(t) | \hat{A} | \psi_i(t) \rangle^2 - \langle \hat{A} \rangle_{(n)}^2(t), \quad (2.75)$$

da cui si ricava l'errore statistico:

$$\delta A(t) = \frac{\sigma(t)}{\sqrt{n}}. \quad (2.76)$$

Si consideri la condizione per un buon rapporto segnale-rumore:

$$\sqrt{n} \gg \frac{\delta A(t)}{\langle A \rangle(t)}. \quad (2.77)$$

Per discutere la condizione imposta dalla (2.77) si fa una distinzione tra due tipi di operatori. I primi sono gli "operatori locali", come per esempio quelli che danno la popolazione di un particolare stato $|j\rangle$, $A = |j\rangle\langle j|$ e $A^2 = A$.

Per questi operatori si ha:

$$\langle A \rangle(t) \sim \frac{1}{N} \quad (\delta A)^2(t) \sim \frac{1}{N}, \quad N \gg 1 \quad (2.78)$$

dove N denota che il numero totale di stati quantistici coinvolti nella simulazione. Se inseriamo questo valore nella (2.77), si vede che il numero di simulazioni n deve essere più grande del numero di stati N . Il metodo Monte-Carlo non è efficiente in questo caso poichè il numero di calcoli coinvolti per calcolare una singola $|\psi(t)\rangle$ è ridotta di un fattore N rispetto al calcolo della matrice densità $\rho(t)$, ma sono necessarie un numero $n \geq N$ di evoluzioni per avere una buona statistica.

Il Metodo Monte-Carlo è più efficiente se si usano “operatori globali”, come ad esempio la popolazione di un grande gruppo di stati. Per questi operatori si ha:

$$\delta A(t) \sim \langle A \rangle(t) . \quad (2.79)$$

In questo caso si vede dalla (2.77) che si ottiene una buona statistica dopo un numero n di evoluzioni più grande di 1. Se si richiede una certa precisione, ad esempio del 10%, la (2.77) indica $n \simeq 100$. Quando il numero di stati coinvolti è più grande di questo numero, la simulazione Monte-Carlo diventa più efficiente dell’integrazione diretta della Master Equation.

Nei programmi sviluppati si valutano le barre d’errore in diverso modo. Il numero totale di evoluzioni n viene diviso in un certo numero di ensemble statistici N_{blk} costituito da n evoluzioni; per ciascun blocco i -esimo si calcola il valore medio dell’osservabile in questione $\langle M_i \rangle$ così come descritto nella (2.18); poi si calcola la media M delle medie e la varianza:

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{N_{blk}} \left(\sum_{i=1}^{N_{blk}} M_i^2 \right) - M^2 , \quad (2.80)$$

da cui, tenuto conto che la relazione tra deviazione standard $\sigma(t)$ ed errore statistico δA è:

$$\delta A = \frac{\sigma(t)}{\sqrt{N_{blk}}} , \quad (2.81)$$

si calcola direttamente l'errore sul valore dell'osservabile. È necessario che ciascun blocco sia costituito da un numero di storie tali che la statistica del blocco sia ragionevole, cioè che le differenze tra i valori medi calcolati per ciascun blocco non sia troppo grande. Inoltre, è necessario che anche il numero dei blocchi sia abbastanza grande in modo tale che la statistica sia significativa: infatti, l'errore statistico diminuisce con la radice di N_{blk} .

Gli errori sistematici di cui si è fatto riferimento sopra, sono gli errori introdotti dal metodo di *Runge-Kutta* [18] usato per calcolare l'evoluzione deterministica della funzione d'onda. Infatti, per ogni step di evoluzione viene introdotto un errore proporzionale alla quarta potenza di δt . Tale errore si propaga nei successivi steps diventando tanto più importante quanto più lungo è il tempo di evoluzione. Per rendere minimo questo errore sistematico (errore di deriva o semplicemente 'deriva') si estrapola a zero il valore medio per δt decrescenti, o in formula:

$$A(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} f(A(t), \delta t) , \quad (2.82)$$

dove $f(A(t), \delta t)$, esprime la dipendenza funzionale tra i valori dell'osservabile $A(t)$ e il time step δt . La relazione 2.82 non è nota e non è sufficientemente semplice da poter essere stimata analiticamente. Comunque, se il δt è abbastanza piccolo, si ha che la $f(A(t), \delta t)$ è lineare in un intorno di $\delta t = 0$.

Quindi si calcola, attraverso un *best fit* dei valori di $A(t)$ calcolati per diversi δt presi con le loro barre d'errore δA , la migliore retta interpolante e si estrapola il valore a $\delta t = 0$ con la relativa incertezza. Convieni di solito calcolare i valori di $A(t)$ per tre δt diversi, scegliendo il valore massimo di δt in modo tale da verificare le condizioni del paragrafo 2.1 e tale che il valore del χ^2 , ottenuto dal best fit, sia minore di 2; inoltre, la scelta del valore massimo di δt , deve essere tale da ottimizzare i tempi di calcolo. Questo modo di procedere è molto efficace perchè permette di eliminare l'errore sistematico diminuendo contemporaneamente i tempi di calcolo.

Capitolo 3

Il micromaser

3.1 Descrizione del sistema

In questo paragrafo diamo una breve descrizione del micromaser, sistema a cui sarà applicato il metodo Monte-Carlo nei prossimi capitoli. Il sistema è schematizzato in figura 3.1: in una cavità superconduttrice, accordata alla lunghezza d'onda delle microonde, vengono immessi atomi di Ridberg che possono effettuare una transizione, la cui frequenza è risonante con il modo fondamentale della cavità.

Questo è il sistema più semplice per lo studio dell'accoppiamento radiazione-materia: si tratta, infatti, di studiare l'interazione tra un atomo a due livelli ed un solo modo della radiazione. Attraverso questo sistema è possibile verificare sperimentalmente alcuni effetti caratteristici quali: la modificazione del rate di emissione spontanea dell'atomo in cavità, lo scambio di energia tra radiazione e atomo, l'esistenza dei “collaps” e “revival” della radiazione [20] e l'esistenza di stati della radiazione subpoissoniani [13],[19].

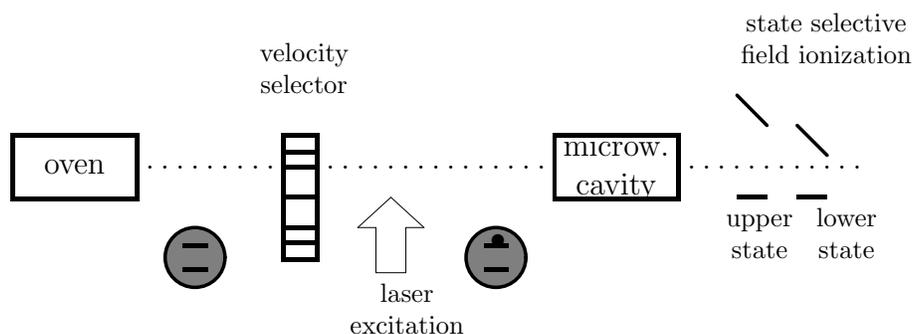


Figura 3.1: Schema dell'esperimento del micromaser.

La cavità è costruita con materiali superconduttori ed è mantenuta a temperature di pochi gradi Kelvin. In questo modo vengono minimizzate le perdite e le fluttuazioni termiche date dalla presenza di fotoni termici. Sperimentalmente si possono realizzare cavità con un fattore di merito Q che va da 10^7 a 10^{11} , che corrisponde a tempi di vita del fotone τ_f che vanno da $500 \mu\text{s}$ a 0.2 s . Tale corrispondenza viene calcolata dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{\tau_f} = \frac{\omega}{Q} = \frac{2\pi\nu}{Q} \quad (3.1)$$

considerando una frequenza di transizione $\nu = 21 \text{ GHz}$.

Il tempo di interazione dell'atomo con la radiazione in cavità è determinato dalla velocità degli atomi. Questa viene fissata attraverso un selettore di velocità di Fizeau posto tra il forno e la cavità. Il selezionatore consente di avere fasci atomici praticamente monocinetici con una larghezza per la distribuzione delle velocità del 4% circa. I valori tipici per il tempo di interazione τ_{int} vanno da 10 a $170 \mu\text{s}$.

L'eccitazione atomica è ottenuta illuminando il fascio atomico con radiazione laser. Gli atomi vengono eccitati su livelli molto alti: ad esempio, nel caso del micromaser costruito da Rempe, Walther e Klein [20], si sono eccitati atomi di rubidio al livello $63^2p_{\frac{3}{2}}$ e si sono usate le transizioni maser $63^2p_{\frac{3}{2}} \longrightarrow 61^2d_{\frac{3}{2}}$ e $63^2p_{\frac{3}{2}} \longrightarrow 61^2d_{\frac{5}{2}}$. Queste transizioni hanno lunghezze d'onda dell'ordine del centimetro, come si può facilmente verificare dalla relazione:

$$\lambda_{n,n\pm 1} \sim \frac{hc}{2R_M}(n^*)^3, \quad (3.2)$$

dove n^* è il numero quantico principale effettivo e R_M è la costante di Rydberg corretta.

Il valore della costante di accoppiamento di dipolo elettrico è molto grande a causa degli alti valori di n^* . Infatti, se si calcola l'elemento di matrice $d_{n,n\pm 1}$ tra livelli di Rydberg adiacenti, si ricava:

$$d_{n,n\pm 1} \sim ea_0(n^*)^2, \quad (3.3)$$

che per le transizioni del Rubidio prima citate fornisce valori uguali a 10 KHz e 44 KHz rispettivamente.

In uscita dalla cavità si misura lo stato degli atomi attraverso un processo di ionizzazione selettiva: gli atomi vengono fatti passare in due campi elettrici separati in grado di ionizzare rispettivamente gli atomi sullo stato eccitato e quelli sullo stato fondamentale. I frammenti elettronici o ionici vengono poi 'contati' con opportuni rivelatori. I rate di rivelazione degli atomi sullo stato eccitato all'uscita della cavità e da quello per gli atomi sullo stato

fondamentale, si ricavano informazioni sullo stato del campo di radiazione in cavità [13], [19].

3.2 Descrizione quantistica del Micromaser

Il problema della descrizione teorica del micromaser è stato affrontato con approcci di tipo diverso. Il sistema è stato descritto sia facendo uso di trattazioni di tipo semiclassico (come in Ref.[21]), sia con trattazioni completamente quantistiche (come in Ref. [10]). Qui non si farà una rassegna completa dei modelli proposti in letteratura, ma ci si limiterà ad illustrare i parametri fondamentali del sistema con brevi cenni agli approcci microscopico-quantistici per descrivere i diversi meccanismi di iniezione di atomi in cavità. Tali meccanismi saranno descritti distintamente per il micromaser ad un atomo e per il micromaser a molti atomi.

3.2.1 Parametri principali del Micromaser

Il micromaser viene descritto attraverso un insieme di parametri caratteristici comuni a tutti i modelli microscopico-quantistici. Questi parametri sono:

- il tempo di volo dell'atomo in cavità τ_{int} .
- il tempo medio tra due atomi eccitati consecutivi τ_0 ;
- il rate di iniezione degli atomi eccitati $r \equiv \tau_0^{-1}$, dove $[r\delta t]$ è la probabilità che un atomo eccitato entri in cavità tra i tempi t e $t + \delta t$;

- il numero medio di atomi eccitati iniettati in cavità durante la vita media del fotone,

$$N_{ex} = \frac{r}{2\gamma_c}, \quad (3.4)$$

dove γ_c è l'inverso del tempo di vita del fotone in cavità. Questo parametro è chiamato anche *flusso effettivo*, perchè il suo valore dà una stima del numero massimo di fotoni che rimangono in cavità, cioè dell'energia massima che può essere intrappolata in una cavità con rate di decadimento γ_c , per un certo flusso atomico r .

- Il parametro di pompaggio:

$$\theta = g\tau_{int}\sqrt{N_{ex}}, \quad (3.5)$$

dove g è la costante di accoppiamento radiazione-atomo. Il prodotto $g\tau_{int}$ è chiamato angolo di Rabi, e dà una indicazione dell'orientazione del vettore di Bloch di ciascun atomo per un dato τ_{int} .

In tabella (3.2.1) vengono riassunti alcuni valori tipici per questi parametri.

3.2.2 Iniezione atomica

Micromaser ad un atomo.

Si descrivono diversi tipi di iniezione atomica per il micromaser ad un atomo. Si chiami T il tempo tra due successivi atomi e p_1 la probabilità

	$63^2p_{3/2} \rightarrow 61^2d_{3/2}$		$63^2p_{3/2} \rightarrow 61^2d_{5/2}$
Masing freq.	21.506 GHz		21.456 GHz
Coupling g	10 kHz		44 kHz
τ_{int}	$50\mu s$	$80\mu s$	$35\mu s$
N_{ex}	[1,30]	[5,120],0.3	[1,50]
Injection rate r	$[5,150]s^{-1}$	$[800,20000],2000 s^{-1}$	$[5,250] s^{-1}$
Temperature	$0.5^\circ K$	2, $4.3^\circ K$	$0.5^\circ K$
Cavity Q	3×10^{10}	$8 \times 10^8, 1.7 \times 10^7$	3×10^{10}
Phot. lifetime	0.2 s	$6 \times 10^{-3}, 0.126 \times 10^{-3} s$	0.2 s
Thermal phot.	0.15	1.5, 3.8	0.15

che un atomo entri in cavità sullo stato eccitato. Questi due parametri sono legati dalla seguente relazione:

$$p_1 = rT . \quad (3.6)$$

Il primo modello di iniezione si ha supponendo che $\tau_{int} \ll \tau_0$, cioè che il tempo di interazione dell'atomo in cavità sia molto minore del tempo tra due atomi eccitati successivi. In altri termini, la cavità interagisce per breve tempo con l'atomo e successivamente evolve solo con i meccanismi di perdita. Questa assunzione consente di dividere la dinamica del micromaser in 2 parti distinte: la prima, in cui si ha il guadagno, che è governata dalla parte del commutatore della Master Equation (le perdite vengono trascurate perchè τ_{int} è supposto piccolo rispetto al tempo di vita del fotone) e la seconda che è descritta dal solo Liuvilliano di rilassamento. La separazione tra guadagni e perdite consente di calcolare analiticamente lo stato stazionario della radia-

zione in cavità [10]. In questo modello gli atomi vengono iniettati in cavità a tempi casuali scelti da una distribuzione Poissoniana. Il rate di iniezione r è un parametro costante maggiore di zero il cui valore è il limite per T e p_1 che tendono a zero del rapporto r/T . Fisicamente questo corrisponde a considerare un fascio di atomi molto vicini che hanno una bassa probabilità di essere eccitati. Pertanto, in cavità entrano pochi atomi eccitati, e mai più di uno per volta. Questo modello è quello che in letteratura viene chiamato *Modello Standard del micromaser* ed è stato studiato da Filipowicz e altri in Ref. [10].

Se gli atomi eccitati vengono iniettati ad intervalli di tempo regolari $T = \tau_0$, si ha il modello del micromaser ad iniezione regolare. In questo caso il flusso r è costante e la probabilità di eccitazione degli atomi deve essere $p_1 = 1$. Questo corrisponde ad una situazione in cui gli atomi sono abbastanza equispaziati (deve valere ancora $\tau_{int} \ll \tau_0$), ma vengono tutti eccitati dal laser. Uno studio degli effetti della statistica di pompaggio sul comportamento della radiazione nel micromaser ad un atomo è stato fatto in Ref. [22].

I modelli sopracitati sono validi in generale per regimi con flussi atomici bassi, per i quali la distanza temporale tra due atomi successivi è molto più grande del tempo di interazione. Questa assunzione non è più valida se si considerano regimi ad alti flussi. In questo caso, pur continuando a supporre che ci sia al più un solo atomo in cavità, si ha che il tempo di interazione

$\tau_{int} \simeq \tau_0$; pertanto, i meccanismi di guadagno e di perdita non possono essere considerati separatamente. Inoltre, una ulteriore complicazione è data dal fatto che la presenza di collisioni atomiche, trascurabile per bassi flussi, in questo caso può diventare importante.

Ponendo $\tau_{int} = \tau_0 = T$ si ottiene il modello di micromaser ad iniezione regolare per alti flussi, dove gli atomi entrano tutti eccitati in cavità e equispaziati in modo tale che il tempo di uscita di un atomo corrisponde esattamente al tempo di ingresso del successivo. Questo modello è stato studiato in Ref. [23].

Micromaser a più atomi

La trattazione microscopico-quantistica della situazione in cui si considera la presenza contemporanea di più atomi in cavità è molto complessa e, in molti casi, lo stato stazionario di questi sistemi è difficile da calcolare, anche numericamente.

In questa tesi si concentra l'attenzione su un particolare modello a più atomi chiamato "modello a cluster", mostrando come sia possibile studiare lo stato stazionario del campo di radiazione attraverso il metodo Monte-Carlo e il metodo dell'operatore di Green. Questo modello ha due varianti: nella prima gli atomi arrivano in cavità a gruppi costituiti da un numero di atomi costante (modello ad iniezione regolare), mentre nella seconda si ha che il numero di atomi per ciascun cluster è distribuito in accordo con una distribuzione Poissoniana (modello ad iniezione Poissoniana). La distanza

spaziale tra gli atomi di ciascun gruppo deve essere molto più piccola della lunghezza della cavità in modo da poter assumere l'ingresso contemporaneo in cavità degli atomi di ciascun cluster. Fisicamente tale situazione si realizza pompando un fascio atomico con un laser impulsato la cui durata è tale da ruotare di π il vettore di Bloch degli atomi e con una larghezza spaziale molto minore della lunghezza della cavità. Per il modello a iniezione regolare si deve supporre che il laser sia in grado di eccitare tutti gli atomi del fascio e che il fascio sia omogeneo in modo tale che il numero di atomi che vengono raggiunti da ciascun impulso sia sempre uguale. Tale situazione è poco realistica tenuto conto sia della presenza di fluttuazioni nella composizione del fascio sia del fatto che i vettori di Bloch sono tra loro sfasati, a causa delle fluttuazioni termiche.

Un modello più realistico è quello a cluster variabili, dove il numero di atomi per ciascun cluster è dato dalla distribuzione Poissoniana:

$$p_N = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}, \quad (3.7)$$

con N uguale al numero di atomi per ciascun cluster e \bar{N} uguale al valore medio della distribuzione. Il rate di pompaggio per il micromaser è dato da:

$$r = \frac{\bar{N}}{T}, \quad (3.8)$$

dove T è l'intervallo di tempo tra due successivi impulsi del laser. Nel nostro modello $T = \tau_{int}$, si suppone cioè che il periodo del laser sia uguale al tempo di volo degli atomi del cluster in cavità. L'interazione cluster-radiazione e

le perdite devono essere considerate contemporaneamente come nel caso di micromaser ad un atomo ad iniezione regolare.

I risultati della simulazione di questo modello e un confronto con i risultati del micromaser ad un atomo ad iniezione regolare e Poissoniana verranno dati nel capitolo (6).

3.3 Campo di radiazione nel micromaser ad un atomo

In questo paragrafo verranno descritte le principali caratteristiche del campo di radiazione nella cavità per alcuni dei modelli di micromaser ad un atomo descritti sopra.

Micromaser Standard.

Si consideri per primo il modello standard [10]. La dinamica di questo sistema è descritta da una Master Equation del tipo (2.1), dove la Hamiltoniana di interazione radiazione-atomo in approssimazione di dipolo e di onda rotante è:

$$H_S = -ig(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-), \quad (3.9)$$

e l'operatore di rilassamento \mathcal{L}_{relax} che descrive le perdite della cavità è dato da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{relax}(\rho_S) = & -\frac{\gamma_c}{2}(1 + \bar{n})(a^\dagger a \rho_S + \rho_S a^\dagger a - 2a \rho_S a^\dagger) \\ & -\frac{\gamma_c}{2}\bar{n}(a a^\dagger \rho_S + \rho_S a a^\dagger - 2a^\dagger \rho_S a), \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove \bar{n} è il numero medio di fotoni termici mentre gli operatori a^\dagger e a sono, rispettivamente, gli operatori di creazione e distruzione del modo della radiazione.

Come già accennato nel paragrafo precedente per questo modello è possibile calcolare l'espressione analitica per lo stato stazionario stroboscopico della radiazione:

$$\bar{p}_n = C \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{N_{ex} \beta_k}{\bar{n} k} \right), \quad (3.11)$$

dove \bar{p}_n è la probabilità di avere n fotoni in cavità mediata sulla distribuzione degli intervalli di tempo tra gli atomi. Tale media è fatta usando la distribuzione $P(t_p) = r e^{-rt_p}$, derivata dall'ipotesi che che gli atomi siano iniettati in cavità con una statistica Poissoniana e con una spaziatura media $\tau_0 = 1/r$ tra due eventi. Nella (3.11) C è la costante di normalizzazione e β_k è (in risonanza):

$$\beta_k = \sin^2 \left(\theta \sqrt{\frac{n}{N_{ex}}} \right). \quad (3.12)$$

Dalla (3.11) è possibile calcolare il numero medio di fotoni in cavità $\langle \hat{n} \rangle$ e la deviazione standard normalizzata σ :

$$\langle \hat{n} \rangle = \sum_k \bar{p}_k k \quad (3.13)$$

$$\sigma = \frac{(\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2)^{\frac{1}{2}}}{\langle \hat{n} \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.14)$$

In figura 3.2 viene mostrato il numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ per $N_{ex} = 200$ e $\bar{n} = 0.1$ fotoni termici. Si può notare come il sistema, oltre al massimo per $\theta \simeq \pi/2$, presenta successivi massimi che, come

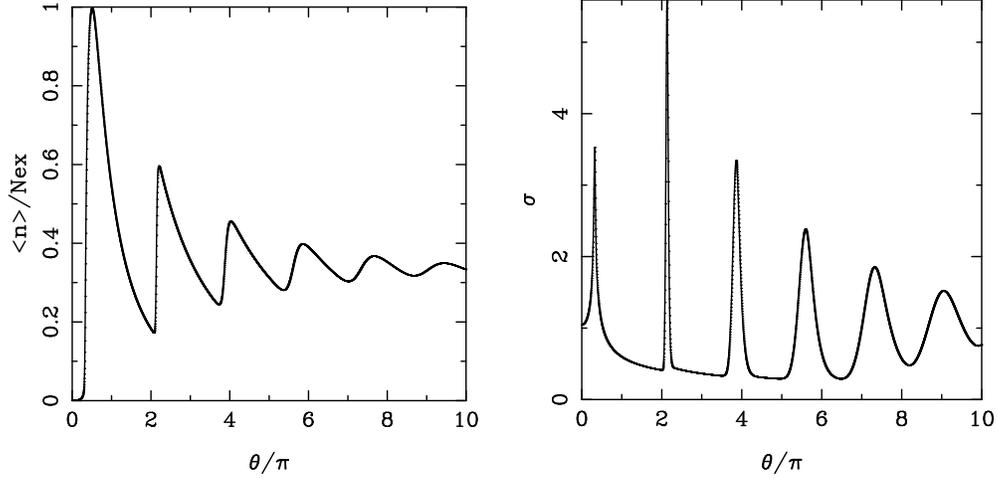


Figura 3.2: (a) Numero medio normalizzato di fotoni nello stato stazionario in funzione del parametro di pompa θ per $N_{ex} = 200$ e $\bar{n} = 0.1$. (b) Deviazione standard normalizzata σ per gli stessi parametri.

si può mostrare, diventano più piccati al crescere di N_{ex} . Questi massimi possono essere interpretati, usando il linguaggio della termodinamica, come transizioni di fase. In questi punti il numero medio $\langle \hat{n} \rangle$ di cicli di Rabi cresce rapidamente di uno e il numero medio di fotoni aumenta improvvisamente. Il numero medio di fotoni può essere interpretato come parametro d'ordine per la transizione [24]. In prossimità di queste transizioni di fase la σ presenta dei picchi molto alti e stretti, indice del fatto che qui le fluttuazioni sono molto forti e più grandi di $\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}$: la statistica in questi punti è “super-Poissoniana”. Tra i punti dove si hanno le transizioni di fase la varianza è più piccola di $\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}$ e quindi la statistica dei fotoni è di tipo “sub-poissoniano”. Questo tipo di statistica non ha un analogo classico ed è un manifestazione peculiare

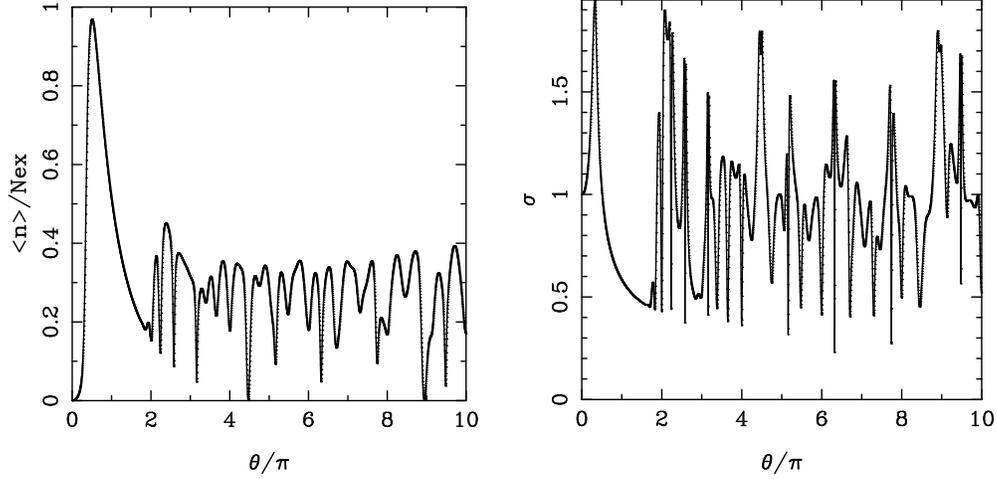


Figura 3.3: (a) Numero medio normalizzato di fotoni nello stato stazionario in funzione del parametro di pompa θ per $N_{ex} = 20$ e $\bar{n} = 0.1$. (b) Deviazione standard normalizzata σ per gli stessi parametri.

della natura quantistica del campo.

In figura 3.3 vengono mostrati $\langle \hat{n} \rangle / N_{ex}$ e σ al variare del parametro di pompa θ per $N_{ex} = 20$ e zero fotoni termici. Si possono notare, per particolari valori di θ , alcuni punti in cui il numero medio di fotoni diminuisce rapidamente e in prossimità dei quali la σ presenta un picco. In questi punti si hanno i cosiddetti stati trappola [25], stati in cui la distribuzione di probabilità è molto piccata intorno ad un particolare stato numero. L'effetto della presenza degli stati trappola nel comportamento della radiazione in un micromaser è stato studiato in [26]. L'esistenza di questi stati è prevista dal modello di Jaynes e Cummings [11]. In questo modello le probabilità congiunte di avere n fotoni in cavità e l'atomo sullo stato eccitato, e la probabilità

di avere $n + 1$ fotoni e l'atomo sullo stato fondamentale sono rispettivamente:

$$P_{e,n} = \cos^2(g\sqrt{n+1}t) , \quad (3.15)$$

$$P_{f,n+1} = \sin^2(g\sqrt{n+1}t) , \quad (3.16)$$

calcolate supponendo che l'atomo al tempo $t = 0$ sia sullo stato eccitato. Gli zeri della (3.16) implicano l'esistenza di stati numero $|n_q\rangle$ per cui gli atomi sperimentano rotazioni di Rabi multiple intere $2q\pi$ durante il tempo di interazione con il campo τ_{int} . Questo significa che all'uscita della cavità l'atomo è nuovamente sullo stato eccitato e, quindi, che il meccanismo di pompaggio viene bloccato. Pertanto le p_n con $n < n_q$ andranno progressivamente diminuendo a causa della continua iniezione di atomi e la distribuzione andrà progressivamente stringendosi intorno a $n = n_q$. L'equazione a cui deve soddisfare n_q è la seguente:

$$g\tau_{int}\sqrt{n_q+1} = q\pi , \quad (3.17)$$

dove q è un numero intero.

Questo fenomeno è contrastato dalle perdite e dalle fluttuazioni termiche che tendono da una parte a propagare la p_n verso valori di n più bassi e dall'altra, attraverso i meccanismi di hopping termico, a rendere possibile superamento della barriera incrementando i valori di p_n con $n > n_q$.

Micromaser ad iniezione regolare in regime di alti flussi.

Si consideri il modello di micromaser ad iniezione regolare per alti flussi descritto nel paragrafo precedente. In questa breve descrizione trascureremo

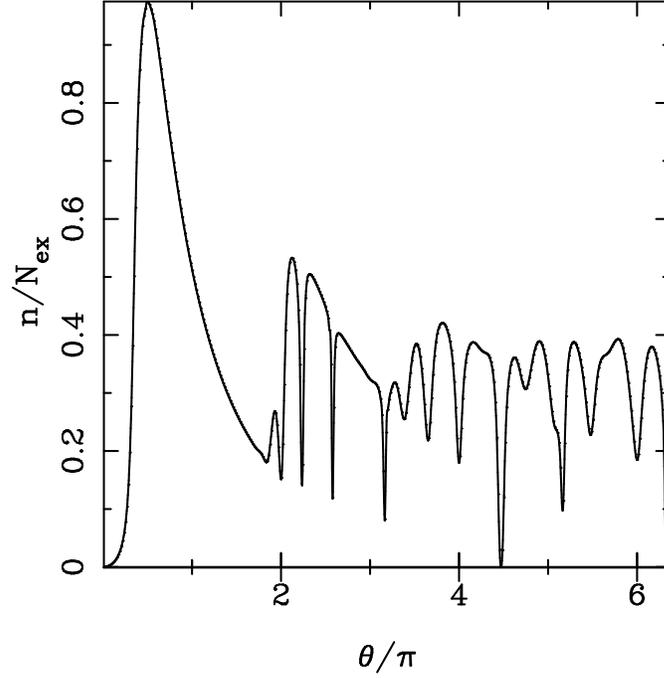


Figura 3.4: Numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ in funzione di θ / π per iniezione regolare, con $\bar{n} = 0$ e $N_{ex} = 20$.

gli effetti legati alla presenza degli urti atomici, il cui studio va oltre gli scopi di questa tesi.

In figura 3.4 viene mostrato il numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ in funzione del parametro di pompa θ / π per zero fotoni termici. Confrontando questa figura con la 3.3 si nota come le due distribuzioni siano praticamente uguali malgrado il modello fisico sia sostanzialmente diverso. Il motivo di tale somiglianza è da ricercarsi nel fatto che in entrambi gli schemi la radiazione interagisce al più con un atomo, quindi, in entrambi i

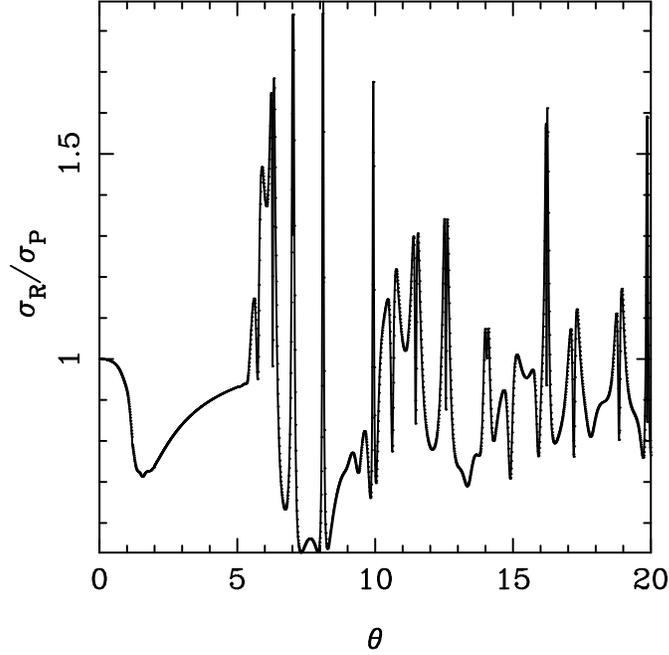


Figura 3.5: Rapporto tra le varianze normalizzate σ_R/σ_P per iniezione regolare and iniezione Poissoniana con $N_{ex} = 20$, $\bar{n} = 0$, e senza il damping atomico.

casi, il campo stazionario è influenzato dalla presenza degli stati trappola, che sarebbero assenti nel caso di più atomi in cavità (vedi paragrafo 6.2).

L'iniezione regolare tende, in generale, a diminuire le fluttuazioni del campo. In figura 3.5, calcolata nel caso di zero fotoni termici, si osserva che il rapporto è minore di uno per la maggior parte dei valori di θ . In alcuni punti però si ha $\sigma_R/\sigma_P > 1$ (dove σ_R è la deviazione standard normalizzata per il micromaser ad iniezione regolare, mentre σ_P è quella per il micromaser ad iniezione Poissoniana). Questi comportamenti anomali si hanno in presen-

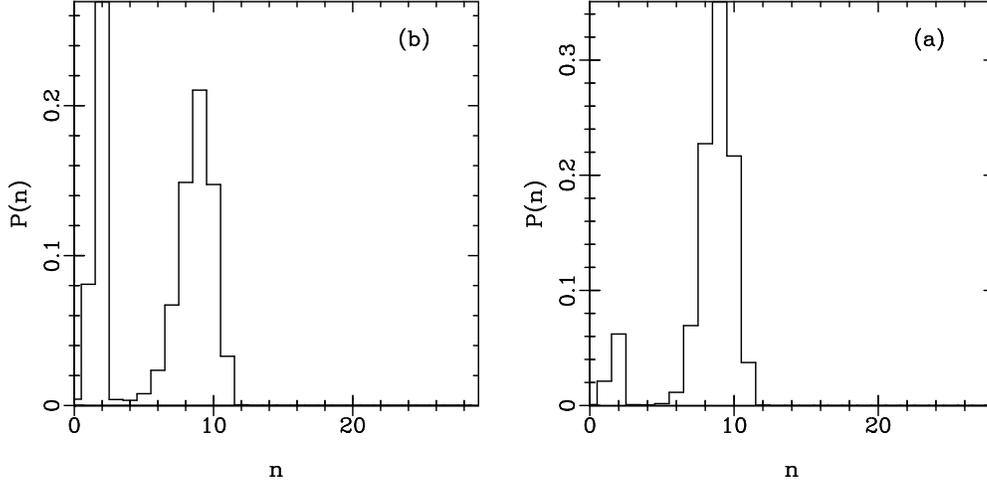


Figura 3.6: Distribuzione di probabilità per i fotoni per $\theta = 7.99$, $N_{ex} = 20$ e $W = \gamma = 0$ per iniezione Poissoniana (a) e per iniezione regolare (b).

za di distribuzioni di probabilità per i fotoni con più picchi. Infatti, se si confrontano le distribuzioni calcolate in un particolare punto (in questo caso $\theta = 7.99$) per i due diversi modelli (si veda fig. 3.6), si osserva che per il caso ad iniezione Poissoniana la distribuzione presenta due picchi di altezza simile, mentre per il caso ad iniezione regolare il picco relativo al numero di fotoni più alto è maggiore di quello per pochi fotoni. Questa differenza è da attribuire al fatto che il meccanismo di pompaggio costituito dalla iniezione regolare è più efficiente. Pertanto, si ha una diminuzione della varianza della distribuzione e quindi, $\sigma_R < \sigma_P$. La situazione opposta si ha per il caso $\theta = 8.09$ (si veda fig. 3.7) dove, per iniezione Poissoniana, si ha una distribuzione con il picco a pochi fotoni molto più grande di quello ad alti fotoni.

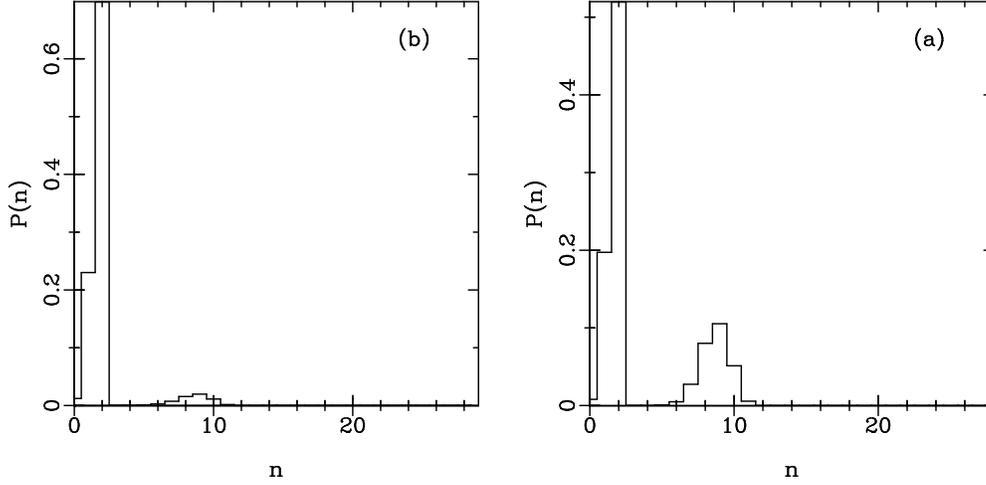


Figura 3.7: Distribuzione di probabilità per i fotoni per $\theta = 8.09$, $N_{ex} = 20$ e $W = \gamma = 0$ per iniezione Poissoniana (a) e per iniezione regolare (b).

In questo caso la regolarizzazione dell'iniezione porta ad un incremento del secondo picco e quindi ad un aumento della varianza, cioè $\sigma_R > \sigma_P$.

Nel caso di temperatura non nulla, la regolarizzazione dell'iniezione diminuisce le fluttuazioni del campo (vedi fig.3.8) anche se, per alti valori di θ e per piccoli intervalli, si ha la situazione opposta. Inoltre, per effetto della temperatura, le σ sono superpoissoniane su quasi tutto l'intervallo di θ .

In figura 3.9 viene mostrato il numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ in funzione di θ per iniezione regolare e Poissoniana con $\bar{n} = 1$ e $N_{ex} = 50$. Si osserva che in generale l'iniezione regolare crea un meccanismo di guadagno più efficiente di quella Poissoniana per un ampio intervallo di θ . Qui la maggiore efficienza è particolarmente evidente perchè i fotoni termici,

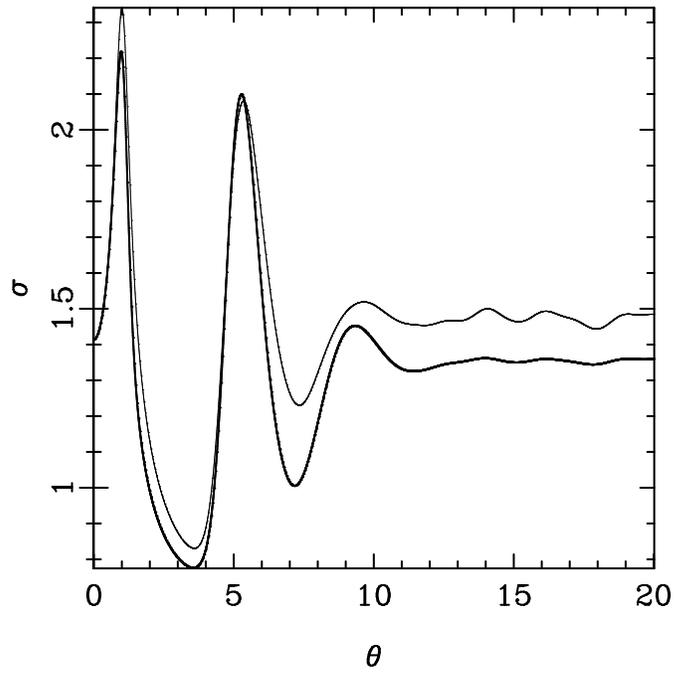


Figura 3.8: Varianza normalizzata per iniezione regolare e Poissoniana con $N_{ex} = 20$ $\bar{n} = 1$, $W = \gamma = 0$.

distruendo gli stati trappola, regolarizzano l'andamento della funzione.

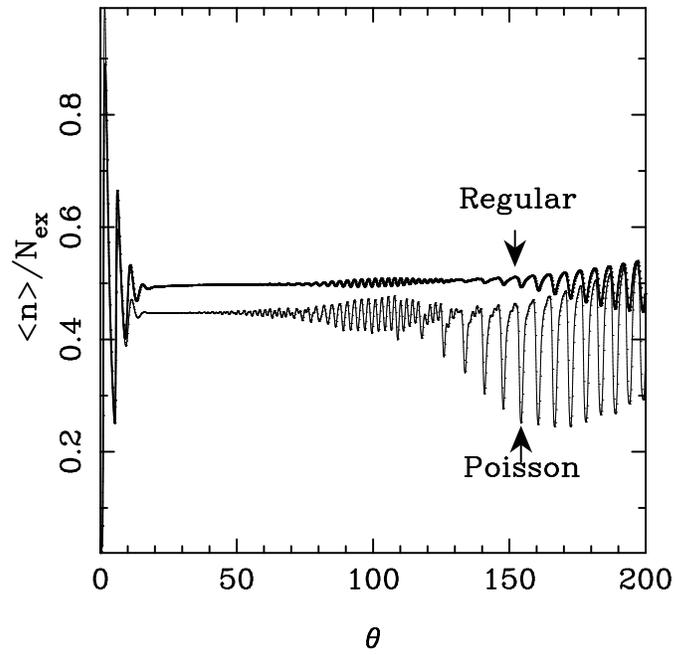


Figura 3.9: Numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ in funzione di θ per iniezione regolare e Poissoniana, con $\bar{n} = 1$, $W = \gamma = 0$, e $N_{ex} = 50$.

Capitolo 4

Simulazione della dinamica in un micromaser

4.1 Micromaser ad un atomo

In questo paragrafo si simula la dinamica di un sistema costituito da un atomo in interazione con radiazione quantizzata in una cavità risonante. Per semplicità si suppone che la radiazione a $t = 0$ sia in uno stato di Fock ben determinato. Come si vedrà tale ipotesi non è restrittiva in quanto, con il metodo dell'operatore di Green descritto nel capitolo 4, queste condizioni iniziali sono sufficienti per determinare la dinamica del sistema.

L'evoluzione di questo sistema è data dalla Master Equation (2.1) con H_s e \mathcal{L}_{relax} definiti dalla (3.9) e (3.10) rispettivamente.

Questa Master Equation può essere simulata con il metodo Monte-Carlo. L'evoluzione della funzione d'onda del sistema è data dalla Hamiltoniana (2.3) nella quale si pone H_S uguale alla (3.9) e si definiscono i due operatori

C_1 e C_2 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\gamma_c(1 + \bar{n})}a \\ C_2 &= \sqrt{\gamma_c\bar{n}}a^\dagger . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Scritta in modo esplicito l'Hamiltoniana non Hermitiana è:

$$H = -ig[a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-] - \frac{i\hbar}{2}\gamma_c[(1 + \bar{n})a^\dagger a + \bar{n}aa^\dagger] . \quad (4.2)$$

Questa Hamiltoniana accoppia solo stati $|e, l-1\rangle$ con stati $|g, l\rangle$, dove il primo indice indica lo stato dell'atomo (e per il livello eccitato e g per quello fondamentale) mentre il secondo indica lo stato della radiazione. I sottospazi dello spazio di Hilbert $\mathcal{S}_l = \{|e, l-1\rangle, |g, l\rangle\}$ sono disaccoppiati e si possono trattare separatamente. La loro somma dà lo spazio di Hilbert totale [15]:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_l \mathcal{S}_l . \quad (4.3)$$

L'evoluzione della $|\psi(t)\rangle$, viene fatta partire dalla condizione iniziale:

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle|l-1\rangle , \quad (4.4)$$

cioè da uno stato dove l'atomo è nello stato eccitato, mentre la radiazione in cavità si trova nello stato numero definito da $l-1$.

La $|\psi(0)\rangle$ viene fatta evolvere con l'Hamiltoniana (4.2), e al generico tempo t diventa:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|e\rangle|n-1\rangle + \beta(t)|g\rangle|n\rangle , \quad (4.5)$$

dove n è il numero massimo di fotoni presenti in cavità al tempo t , cioè il numero di fotoni presenti prima dell'ingresso dell'atomo più il fotone che viene scambiato dall'atomo con la cavità. L'evoluzione di $\alpha(t)$ e di $\beta(t)$ è data dalle seguenti equazioni:

$$\dot{\alpha}(t) = -g\sqrt{n}\beta(t) - \frac{\gamma_c}{2}(2\bar{n}n + n - \bar{n} - 1)\alpha(t) \quad (4.6)$$

$$\dot{\beta}(t) = g\sqrt{n}\alpha(t) - \frac{\gamma_c}{2}(2\bar{n}n + \bar{n} + n)\beta(t). \quad (4.7)$$

Il sistema evolve rimanendo in uno stato di \mathcal{S}_n fino a quando si verifica un *Quantum Jump*. In questo caso, lo stato viene proiettato nello spazio $\mathcal{S}_{n\pm 1}$, dove il segno positivo si riferisce al caso in cui la cavità acquista un fotone dalle pareti e il segno meno si riferisce al caso in cui perde un fotone. Dopo il Quantum Jump lo stato evolve nel nuovo sottospazio fino al successivo Jump. Lo stato del sistema può perciò essere completamente descritto da due livelli e da un numero intero n che varia con discontinuità e che indica a quale sottospazio \mathcal{S}_n appartengono i due livelli. Questo parametro viene diminuito o incrementato di una unità ogni volta che un fotone viene perso, o acquistato, dalla cavità.

Si è simulata l'evoluzione del valore medio di due osservabili: l'operatore numero di fotoni \hat{n} e l'inversione di popolazione $\hat{\sigma}_z$. Questi sono ottenuti facendo la media sul numero delle evoluzioni dei valori medi $\langle \psi_i(t) | \hat{n} | \psi_i(t) \rangle$ e $\langle \psi_i(t) | \hat{\sigma}_z | \psi_i(t) \rangle$, ottenuti per ogni evoluzione, come spiegato nel paragrafo (2.1).

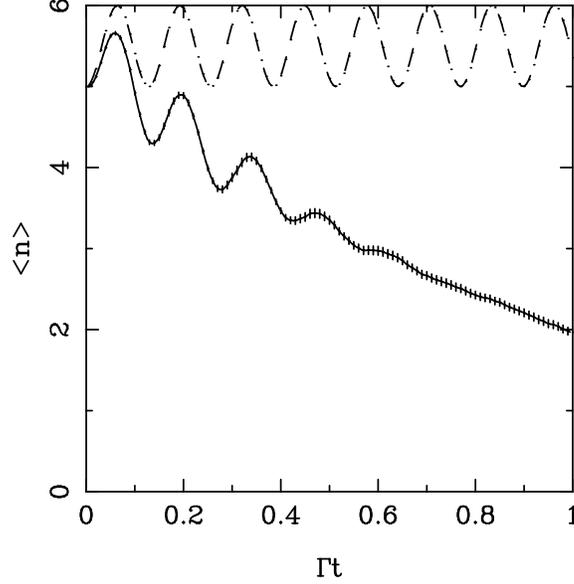


Figura 4.1: Dinamica di $\langle \sigma_z \rangle$ in un sistema costituito da un atomo e radiazione quantizzata posta a $t = 0$ nello stato di Fock $n = 5$. La simulazione è fatta con un insieme statistico di 100 blocchi di 10 storie ciascuno e con i seguenti parametri: $g/\gamma_c = 10$, $\bar{n} = 0.1$. Il tempo e le frequenze sono scalati con l'inverso del tempo di vita del fotone in cavità. La linea tratteggiata rappresenta la soluzione analitica nel caso di cavità senza perdite.

Questi valori sono dati dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle(t)_{(i)} &= (n(t)_i - 1)\alpha(t)_{(i)}^2 + n(t)_i\beta(t)_{(i)}^2 \\ \langle \hat{\sigma}_z \rangle(t)_{(i)} &= \frac{1}{2}(\alpha(t)_{(i)}^2 - \beta(t)_{(i)}^2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

dove i è l'indice sulle storie. Questa media viene ripetuta per un certo numero di blocchi statistici come descritto nel paragrafo (2.4).

In figura 4.1 e in 4.2, viene riportato il risultato della simulazione ottenuto partendo con un atomo nello stato eccitato e con 5 fotoni in cavità. In

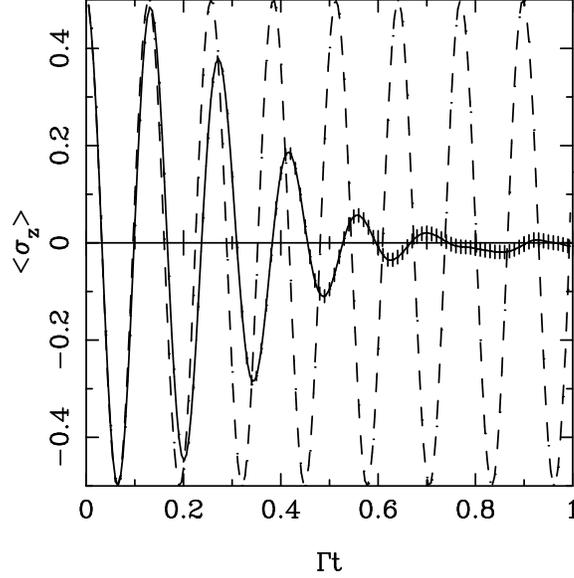


Figura 4.2: Dinamica di $\langle \sigma_z \rangle$ in un sistema costituito da un atomo e radiazione quantizzata posta a $t = 0$ nello stato di Fock $n = 5$. La simulazione è fatta con un insieme statistico di 100 blocchi di 10 storie ciascuno e con i seguenti parametri: $g/\gamma_c = 10$, $\bar{n} = 0.1$. Il tempo e le frequenze sono scalati con l'inverso del tempo di vita del fotone in cavità. La linea tratteggiata rappresenta la soluzione analitica nel caso di cavità senza perdite.

questa simulazione si è posto $g/\gamma_c = 10$ e il numero medio di fotoni termici $\bar{n} = 0.1$. Si osserva che il numero medio di fotoni decade e oscilla con una ampiezza che va progressivamente smorzandosi al passare del tempo. Questo comportamento è dato dalla sovrapposizione di due fenomeni:

- i)* lo scambio continuo di un fotone tra atomo e cavità con l'oscillazione di Rabi dell'atomo;
- ii)* le perdite della cavità.

Il primo fenomeno è causa dell'oscillazione di $\langle \hat{n} \rangle(t)$: infatti, nel caso di cavità perfetta e temperatura nulla, l'espressione analitica per l'evoluzione del numero di fotoni è:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle(t) &= l - \cos^2(g\sqrt{l}t) \\ &= n_0 + \sin^2(g\sqrt{n_0 + 1}t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

cioè un'oscillazione con frequenza $2g\sqrt{n_0 + 1}$ tra n_0 e $n_0 + 1$, dove n_0 è il numero di fotoni in cavità a $t = 0$.

Il secondo fenomeno è responsabile del decadimento che, in assenza di interazione e a temperatura nulla, sarebbe descritto semplicemente dall'equazione:

$$\langle \hat{n} \rangle(t) = n_0 e^{-\gamma_c t}. \quad (4.10)$$

Le perdite della cavità inducono una diminuzione della frequenza di oscillazione (che è proporzionale a \sqrt{n}) e la progressiva diminuzione dell'ampiezza. Per spiegare quest'ultimo fenomeno bisogna considerare congiuntamente la dinamica di $\langle \hat{n} \rangle$ e $\langle \sigma_z \rangle$.

L'evoluzione di $\langle \sigma_z \rangle$ ha un comportamento simile ad un oscillatore smorzato. Le oscillazioni sono dovute all'interazione atomo-radiazione, mentre lo smorzamento è dato dalle perdite della cavità. Per cavità perfetta e temperatura nulla la dinamica di $\langle \sigma_z \rangle$ è data dall'equazione:

$$\langle \hat{n} \rangle(t) = \frac{1}{2}(\cos^2(g\sqrt{n_0 + 1}t) - \sin^2(g\sqrt{n_0 + 1}t)), \quad (4.11)$$

che descrive una oscillazione con frequenza $2g\sqrt{n_0 + 1}$. Le perdite della cavità fanno diminuire progressivamente la frequenza di oscillazione. La progressiva diminuzione dell'ampiezza di oscillazione sia di $\langle \hat{n} \rangle$ che di $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ è dovuta al crearsi di stati con minor numero di fotoni. Per questi stati si ha una diversa frequenza di Rabi, pertanto si crea una interferenza distruttiva che fa decadere $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$. Le perdite fanno scendere la distribuzione di probabilità della radiazione verso il vuoto e quindi la precessione tende a spegnersi.

4.2 Micromaser a cluster di atomi

In questo paragrafo si applica il metodo Monte-Carlo alla simulazione della dinamica di un cluster di atomi in cavità. Supporremo per semplicità che la radiazione in cavità a $t = 0$ sia in uno stato di Fock (come già accennato, e come verrà mostrato dettagliatamente in seguito, queste sono le condizioni iniziali sufficienti per determinare l'operatore di Green della Master Equation).

La dinamica è descritta da una Master Equation del tipo (2.1), dove l'Hamiltoniana del sistema H_S , in approssimazione di dipolo e di onda rotante, è:

$$H_S = -ig \sum_{j=0}^N (\sigma_+^j a - \sigma_-^j a^\dagger). \quad (4.12)$$

Nell'equazione (4.12) N è il numero di atomi nel cluster mentre σ_+^j e σ_-^j sono gli operatori di Pauli dell'atomo i -esimo. L'operatore di rilassamento della radiazione \mathcal{L}_{relax} è definito ancora dalla (3.10).

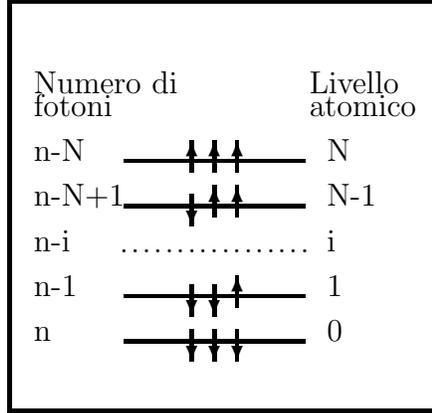


Figura 4.3: Diagramma dei livelli per il cluster: a sinistra è riportato il numero di fotoni in cavità corrispondente a ciascun stato del multipletto simmetrico.

L'Hamiltoniana H_S può essere riscritta definendo l'operatore di "pseudo-spin" totale $\hat{J}_{\pm} = \sum_{j=1}^N \sigma_{\pm}^j$:

$$H_S = -ig(\hat{J}_+ a - \hat{J}_- a^\dagger). \quad (4.13)$$

Il significato del momento angolare totale \hat{J} diventa chiaro se si considera l'analogia formale tra il modello dell'atomo a due livelli e un sistema a spin 1/2. In questo contesto \hat{J} rappresenta l'operatore di "pseudo-spin" totale di un insieme di N doppietti di spin. In questo contesto lo stato del cluster può essere completamente descritto da un insieme di $(2J+1)$ stati $|J, m\rangle$ dove J è il valore dello "pseudo-spin" e m è il valore della componente quantizzata del vettore di spin lungo una particolare direzione. Nel caso in considerazione si ha $J = N/2$ cioè un numero di livelli uguale a $(N+1)$.

Simuliamo la dinamica di questo sistema con il Metodo Monte-Carlo. L'Hamiltoniana che determina l'evoluzione della funzione d'onda $|\psi\rangle$ è data ancora dalla (2.3) nella quale si pone H_S uguale alla (4.12) e si definiscono i due operatori C_1 e C_2 come nelle (4.1). Supponiamo ora che la radiazione in cavità a $t=0$ sia in uno stato numero e che tutti gli atomi del cluster siano sullo stato eccitato all'ingresso in cavità. Lo stato iniziale del sistema è:

$$|\psi(0)\rangle = |l - N\rangle|N\rangle , \quad (4.14)$$

mentre al generico tempo t è dato da:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=0}^N \alpha_{N-i}(t) |n - i\rangle|i\rangle \quad (4.15)$$

In queste equazioni il primo ket è un particolare stato numero della radiazione mentre il secondo indica un generico stato del multipletto di “pseudo-spin” ed è definito nel seguente modo:

$$|i\rangle = |N/2, i - N/2\rangle .$$

L'indice l nella (4.14) indica il numero massimo di fotoni in cavità, cioè la somma dei fotoni presenti in cavità all'ingresso del cluster con i fotoni scambiati tra gli atomi e la radiazione, mentre l'indice n nella (4.15) è la somma dei fotoni presenti in cavità al tempo t con i fotoni scambiati.

L'evoluzione dei coefficienti $\alpha_{N-i}(t)$ è data dalle seguenti equazioni:

$$\dot{\alpha}_0(t) = g\sqrt{nN}\alpha_1(t) + A_{loss}^{(0)}\alpha_0(t) \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k(t) = & -g\sqrt{(n-k+1)}\sqrt{k(N-k+1)}\alpha_{k-1}(t) + \\ & + g\sqrt{(n-k)}\sqrt{(N-k)(k+1)}\alpha_{k+1}(t) + \\ & + A_{loss}^{(k)}\alpha_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\dot{\alpha}_N(t) = -g\sqrt{N(n-N+1)}\alpha_{N-1}(t) + A_{loss}^{(N)}\alpha_N(t) \quad (4.18)$$

$$(k = 1 \dots N - 1),$$

con:

$$A_{loss}^{(k)} = -\frac{1}{2}[(2\bar{n} + 1)(n - k) + \bar{n}] \quad (4.19)$$

$$(k = 0 \dots N). \quad (4.20)$$

Da queste si vede come l'Hamiltoniana di evoluzione accoppi solo stati appartenenti al sottospazio dello spazio di Hilbert $\mathcal{S}_n = \{|n, N\rangle, |n-1, N-1\rangle, \dots, |n-N, 0\rangle\}$. La somma di tutti i sottospazi di Hilbert \mathcal{S}_n dà l'intero spazio di Hilbert. Lo stato del sistema è perciò completamente descritto da un insieme di $N + 1$ livelli e da un numero intero n . Tale numero viene diminuito o incrementato di una unità ad ogni *Quantum Jump*, spostando l'evoluzione dal sottospazio \mathcal{S}_n al sottospazio $\mathcal{S}_{n\pm 1}$.

Abbiamo simulato l'evoluzione del valore medio del numero di fotoni \hat{n} e della matrice di Pauli σ_z . Il valore di tali osservabili è ottenuto come media

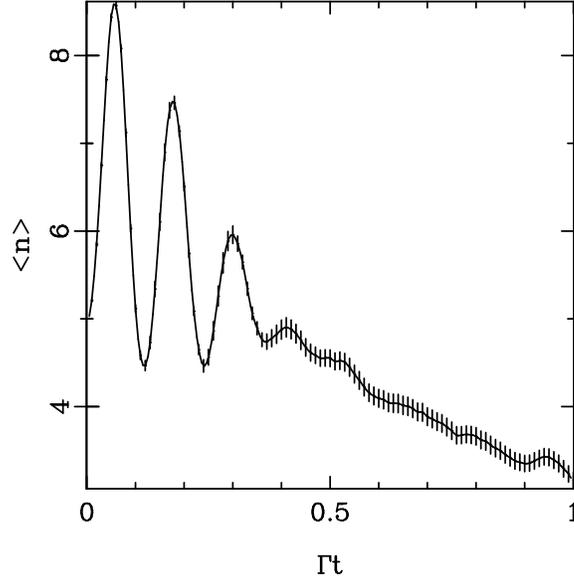


Figura 4.4: Dinamica di $\langle \hat{n} \rangle$ in un sistema costituito da un cluster di $N = 4$ atomi e radiazione quantizzata posta a $t = 0$ nello stato di Fock $n = 5$. La simulazione è fatta con un insieme statistico di 100 blocchi di 10 storie ciascuno e con i seguenti parametri: $g/\gamma_c = 10$, $\bar{n} = 0.1$. Il tempo e le frequenze sono scalati con l'inverso del tempo di vita del fotone in cavità.

sul numero di storie delle seguenti quantità:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle_{(i)}(t) &= \sum_{k=0}^N [n(t)_{(i)} - k] \alpha_k^{(i)}(t)^2 \\ \langle \hat{\sigma}_z \rangle_{(i)}(t) &= \sum_{k=0}^N \left(k - \frac{1}{2}N \right) \alpha_k^{(i)}(t)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

dove i è l'indice sulle storie. Questa media viene ripetuta per un certo numero di blocchi statistici come descritto nel paragrafo (2.4).

In figura 4.4 e 4.5 viene mostrato il risultato della simulazione della dinamica di queste osservabili nel caso di un cluster di 4 atomi. Il comportamento

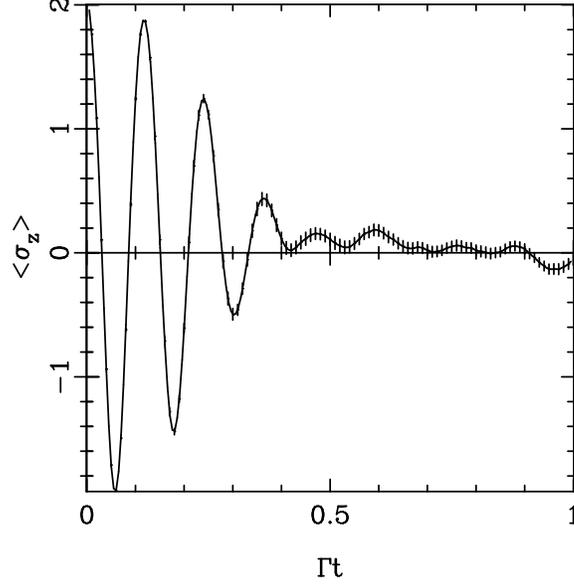


Figura 4.5: Dinamica di $\langle \sigma_z \rangle$ in un sistema costituito da un cluster di $N = 4$ atomi e radiazione quantizzata posta a $t = 0$ nello stato di Fock $n = 5$. La simulazione è fatta con un insieme statistico di 100 blocchi di 10 storie ciascuno e con i seguenti parametri: $g/\gamma_c = 10$, $\bar{n} = 0.1$. Il tempo e le frequenze sono scalati con l'inverso del tempo di vita del fotone in cavità.

è qualitativamente simile a quello ottenuto nel caso ad un atomo. La differenza sostanziale sta nell'ampiezza delle oscillazioni, che in questo caso è maggiore. Infatti, gli atomi del cluster, entrando in cavità, emettono e assorbono il fotone in modo coerente determinando un'oscillazione nel numero medio di fotoni che è pari al numero di atomi del cluster. Questa oscillazione viene poi smorzata dal “damping” della cavità e dalle fluttuazioni termiche.

L'inversione di popolazione $\langle \sigma_z \rangle$ oscilla tra 2 e -2 che rappresentano rispettivamente il caso in cui tutti gli atomi del cluster sono sullo stato eccitato e il

caso in cui sono tutti sul livello fondamentale. Questa oscillazione è smorzata dal “damping” attraverso un meccanismo del tutto simile a quello descritto nel paragrafo precedente.

Capitolo 5

Simulazione dell'operatore di Green del micromaser

5.1 Micromaser ad un atomo

In questo paragrafo si descrive un metodo per simulare lo stato stazionario stroboscopico della radiazione in un micromaser. Il metodo viene descritto nel caso particolare di un micromaser ad un atomo nell'approssimazione di cavità sempre piena. In questa approssimazione si suppone che gli atomi siano immessi con iniezione regolare e che il tempo di interazione τ_{int} , e il tempo che intercorre tra l'ingresso di un atomo e il successivo τ_0 , coincidano.

La dinamica della matrice densità è determinata dalla *Master Equation*:

$$\dot{\rho}_{AR}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_{AR}(t)] + \mathcal{L}_{relax}(\rho_{AR}) \equiv \mathcal{L}\rho_{AR}(t), \quad (5.1)$$

dove $\rho_{AR}(t)$ è la matrice densità congiunta radiazione-atomo, H_S è l'Hamiltoniana di Jaynes-Cummings (4.13), $\mathcal{L}_{relax}(\rho_{AR})$ è l'operatore di rilassamento (3.10) e \mathcal{L} è lo Liuvilliano complessivo.

Il sistema viene descritto a partire dall'ingresso del primo atomo in cavità ($t = 0$). La matrice densità del sistema in questo istante è:

$$\rho_{AR}(0) = |e\rangle\langle e| \otimes \rho_R(0) , \quad (5.2)$$

con l'atomo che entra in cavità sullo stato eccitato e con la matrice densità della radiazione a $t = 0$ diagonale nella rappresentazione dello stato numero (come, per esempio, nel caso termico).

All'uscita dell'atomo dalla cavità il sistema è descritto dalla sola matrice densità della radiazione che viene calcolata tracciando la $\rho_{AR}(t)$ sulle variabili atomiche:

$$\rho_R(t_1) = \text{Tr}_A[\rho_{AR}(t_1)] , \quad (5.3)$$

(t_1 indica il tempo di uscita del primo atomo). L'operazione di traccia indica che, dopo essere uscito dalla cavità, lo stato dell'atomo viene escluso dalla descrizione del sistema. In altri termini, la nostra attenzione è fissata sulla radiazione in cavità. Comunque quando l'atomo è in cavità esso interagisce con la radiazione e l'interazione produce correlazioni atomo-radiazione. La (5.2), scritta esplicitando la $\rho_{AR}(t_1)$, è:

$$\rho_R(t_1) = \text{Tr}_A[e^{\mathcal{L}\tau_{int}} |e\rangle\langle e| \otimes \rho_R(0)] \quad (5.4)$$

dove $e^{\mathcal{L}\tau_{int}}$ è l'operatore di Green che evolve la matrice densità congiunta atomo-radiazione.

In generale all'ingresso in cavità dell' i -esimo atomo la ρ_{AR} è data da:

$$\rho_{AR}(t_i) = |e\rangle\langle e| \otimes \rho_R(t_i) , \quad (5.5)$$

e alla sua uscita, la ρ_R è:

$$\rho_R(t_{i+1}) = \text{Tr}_A[e^{\mathcal{L}\tau_{int}} |e\rangle\langle e| \otimes \rho_R(t_i)] . \quad (5.6)$$

Questa equazione con la (5.2) definisce una funzione ricorsiva che dà la ρ_R all'uscita dell' i -esimo atomo (che coincide con l'ingresso dell' $(i+1)$ -esimo atomo).

Ad ogni t_i la matrice densità della radiazione, che abbiamo supposto diagonale nello stato numero, rimane diagonale. Questo perchè la traccia sullo stato dell'atomo distrugge gli elementi di matrice fuori digonale generati dall'Hamiltoniana di interazione. Perciò si ha:

$$\rho_R(t_i) = \sum_n p_n(t_i) |n\rangle\langle n| , \quad (5.7)$$

per ogni t_i . I coefficienti p_n rappresentano ciascuno la probabilità di avere n fotoni in cavità.

Si consideri nuovamente l'equazione (5.6). Questa può essere riscritta definendo l'operatore \hat{G} di Green per la sola radiazione nel seguente modo:

$$\hat{G}\rho_R = \text{Tr}_A[e^{\mathcal{L}\tau_{int}} |e\rangle\langle e| \otimes \rho_R] . \quad (5.8)$$

La (5.6) diventa allora:

$$\rho_R(t_{i+1}) = \hat{G}\rho_R(t_i) , \quad (5.9)$$

che, scritta in forma matriciale per le singole componenti, equivale a:

$$p_n(t_{i+1}) = \sum_m G_{nm} p_m(t_i) . \quad (5.10)$$

Lo stato stazionario stroboscopico della radiazione si calcola imponendo che la matrice densità al tempo t_i sia uguale alla matrice densità al tempo t_{i+1} , cioè:

$$\rho_R(t_{i+1}) = \rho_R(t_i) . \quad (5.11)$$

Questa condizione non determina un vero e proprio stato stazionario ma uno stato stazionario stroboscopico: d'altra parte l'interazione atomo-radiazione non darebbe luogo a stato stazionario durante il tempo di volo dell'atomo in cavità.

Attraverso la (5.10) e la (5.7) si ricava la condizione per le singole probabilità p_n :

$$p_n(t_i) = \sum_m G_{nm} p_m(t_i) . \quad (5.12)$$

L'equazione (5.12) mostra che lo stato stazionario stroboscopico è l'autostato di G_{nm} corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$.

Occorre, a questo punto, determinare un metodo per costruire la matrice G_{nm} . Si consideri nuovamente la matrice densità, che, nel nostro caso, è un vettore i cui elementi rappresentano ciascuno la probabilità di trovare la radiazione in un determinato stato numero. La ρ_R è perciò un vettore i cui elementi sono maggiori o uguali a zero, e la cui somma è uguale ad uno (vettore di probabilità). Si supponga che la radiazione in cavità sia al tempo t_i in un generico stato numero $|k\rangle$, cioè che la matrice densità sia della forma:

$$p_n(t_i) = \delta_{i,k} \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.13)$$

Si fa evolvere il campo fino al tempo t_{i+1} : lo stato della radiazione è ora dato dalla $\rho_R(t_{i+1})$ che, scritta per le singole componenti, equivale a:

$$\begin{aligned} p_j(t_{i+1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{jn} p_n(t_i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{j,n} \delta_{k,n} = G_{jk}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Questa espressione, evidenzia il significato fisico degli elementi della matrice G_{jk} : l'elemento G_{jk} è la probabilità che la radiazione, che all'ingresso dell'atomo (tempo t_i) era nello stato $|k\rangle$, sia nello stato $|j\rangle$ all'uscita dello stesso atomo a t_{i+1} . Quindi, gli elementi di matrice G_{ji} sono delle probabilità, e devono pertanto soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} G_{ji} \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} G_{ji} = 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

La prima condizione è l'ovvia positività delle probabilità, mentre la seconda è la normalizzazione. Una matrice che soddisfa le condizioni (5.15) è detta matrice di Markoff [27]. Da queste considerazioni, si può intuire come sia possibile costruire la matrice \mathbf{G} usando il metodo Monte-Carlo. Il primo passo consiste nel supporre che la radiazione sia nello stato di vuoto $|0\rangle$ e quindi che lo stato iniziale del sistema sia:

$$|\psi(0)\rangle_1 = |e\rangle \otimes |0\rangle. \quad (5.16)$$

Il sistema viene fatto evolvere come descritto nel capitolo (2.1) con l'Hamiltoniana efficace (4.2). Al termine dell'evoluzione la funzione d'onda è:

$$|\psi(\tau_{int})\rangle_1 = \alpha_{(n-1)}^{(1)}(\tau_{int})|e\rangle|n-1\rangle + \alpha_n^{(1)}(\tau_{int})|g\rangle|n\rangle. \quad (5.17)$$

L'evoluzione viene ripetuta per un numero di storie N_s a partire dalla stessa condizione iniziale (5.16). La matrice densità ρ_R al termine dell'evoluzione è calcolata mediando i proiettori $|\psi(\tau_{int})\rangle_i\langle\psi(\tau_{int})|_i$ sul numero di storie:

$$\begin{aligned}\rho_R(\tau_{int}) &= \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} |\psi(\tau_{int})\rangle_i\langle\psi(\tau_{int})|_i \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} |\alpha_n^{(i)}|^2 \right) |n\rangle\langle n|,\end{aligned}\quad (5.18)$$

(si noti che la somma su n contiene solo un numero finito di elementi in una simulazione reale, in quanto non si generano stati con n maggiore di un valore massimo che dipende dall'insieme casuale delle storie simulate).

Ciascun elemento p_n della $\rho_R(\tau_{int})$ è, per come è stato calcolato, la probabilità che la radiazione, fatta evolvere dallo stato $|0\rangle$, si trovi nello stato $|n\rangle$ a $t = \tau_{int}$: quindi, si ha $G_{0n} = p_n$. Si è costruita in questo modo la prima riga della matrice \mathbf{G} . Si procede poi nello stesso modo per costruire la riga successiva: si pone lo stato della radiazione a uguale a $|1\rangle$ a $t = 0$, si fa evolvere la funzione d'onda dalla $|\psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes |1\rangle$, si ripete l'evoluzione N_s volte e si calcola la $\rho_R(\tau_{int})$. Si determina così la seconda riga della \mathbf{G} . Analogamente si calcolano tutte le altre righe.

Nella (5.18), come già osservato, la somma su n è troncata ad un valore N_m massimo che può essere scelto come il massimo numero di fotoni raggiunto nella simulazione. Una stima dell'ordine di grandezza di N_m si può fare sulla base del seguente argomento: la crescita del numero di fotoni, dovuta alla continua iniezione di atomi, è in competizione con le perdite della

cavità. Scrivendo le rate equation per il numero medio di fotoni [10], questa affermazione appare più chiara:

$$\langle \dot{n} \rangle = \frac{1}{\tau_{int}} \sin^2(g\sqrt{\langle n+1 \rangle} \tau_{int}) - \gamma_c \langle n \rangle, \quad (5.19)$$

dove il primo termine è il guadagno dovuto alla variazione della inversione atomica, mentre il secondo termine descrive le perdite della cavità supponendo $\bar{n} = 0$. Lo stato stazionario si raggiunge quando si annulla la derivata

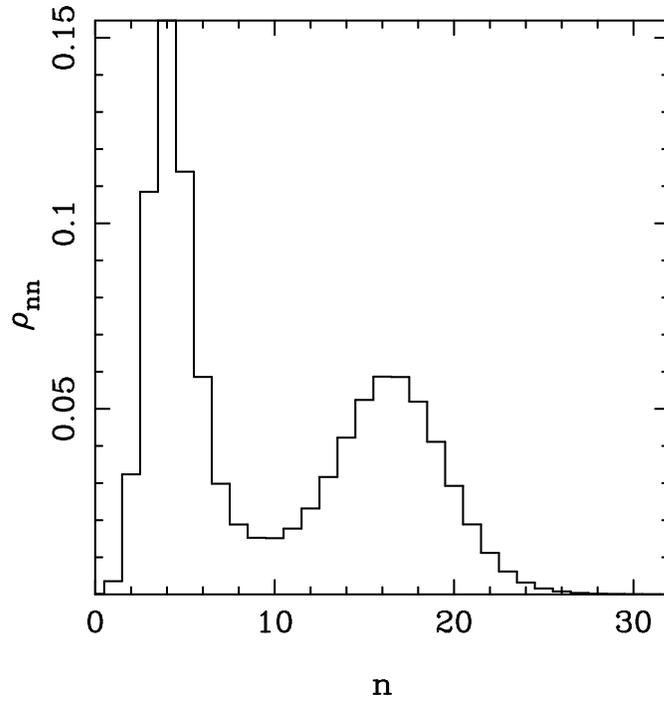


Figura 5.1: Distribuzione di probabilità del numero di fotoni, ottenuta calcolando numericamente l'operatore di Green. I parametri sono: $N_{ex} = 20$, $\theta = 5.5$, $\bar{n} = 1$. Da questa si ricavano il numero medio di fotoni ($\langle n \rangle = 10.02$) e la varianza $\langle \Delta n^2 \rangle = 40.74$

$\langle \dot{n} \rangle$. Da questa condizione si ricava che il numero medio di fotoni allo stato stazionario è $\langle n \rangle \simeq 1/\gamma_c \tau_{int}$, dove si è preso $\tau_{int} \ll 1$ e si è sviluppata la funzione seno al primo ordine in τ_{int} nella (5.19). Questo risultato consente di prevedere che una buona scelta di N_m può essere di alcuni $N_{ex} = 1/\gamma_c \tau_{int}$. La matrice \mathbf{G} viene limitata, a causa del troncamento, ed ha dimensione $(N_m \times N_m)$.

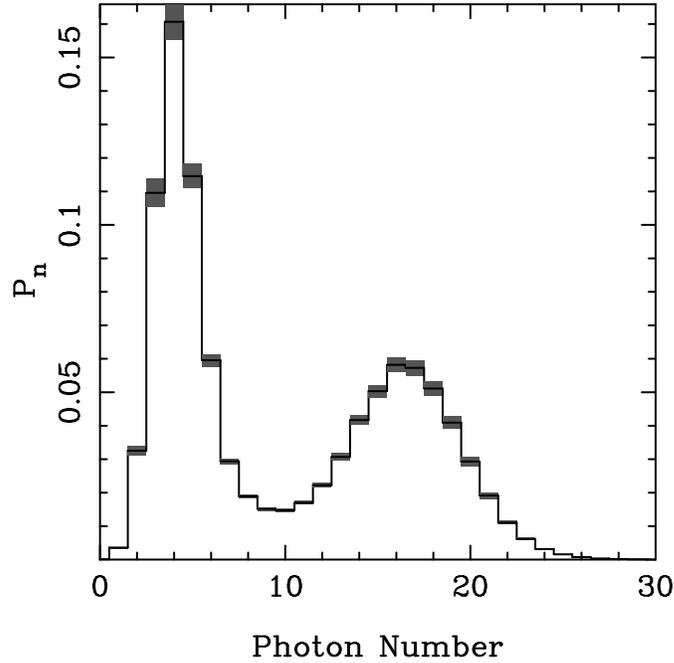


Figura 5.2: Distribuzione di probabilità del numero di fotoni ottenuta con il Metodo Monte-Carlo. I parametri per questa simulazione sono: $g/\gamma_c = 24.596$, $\tau_{int} = 0.05$, $dt = .005$, $\bar{n} = 1$, $N_{blk} = 100$ e $N_s = 100$. Il numero medio di fotoni e la varianza, sono rispettivamente: $\langle n \rangle = 9.92 \pm 0.19$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 39.36 \pm 0.46$.

Dopo aver costruito la matrice \mathbf{G} , il problema è praticamente risolto: infatti, come già detto, lo stato stazionario della radiazione corrisponde all'autovettore relativo all'autovalore 1 di questa matrice.

Si considerano quindi un insieme di N_{blk} simulazioni della matrice di Green, per ciascuno dei quali si diagonalizza e si trova lo stato stazionario; quindi si media lo stato sulle N_{blk} simulazioni, valutando l'errore statistico ed estrapolando a $\delta t = 0$ (vedi paragrafo (2.4)).

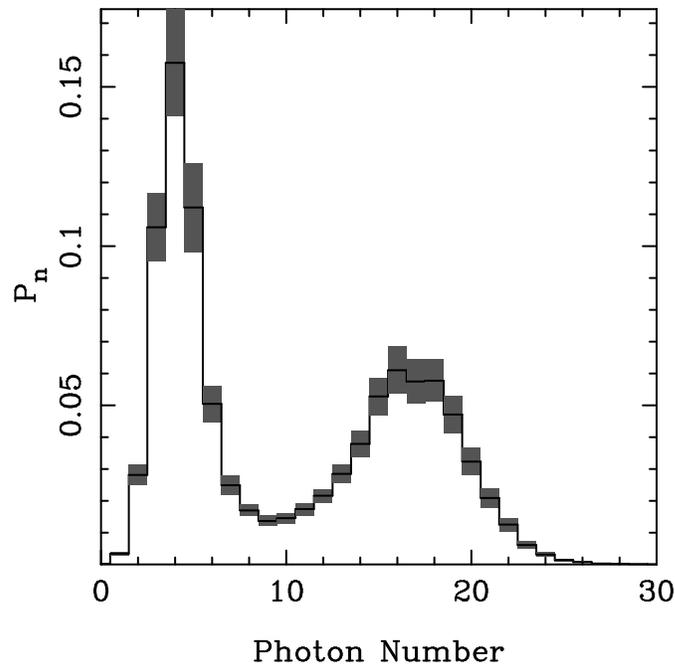


Figura 5.3: Simulazione dello stesso stato stazionario ma con $N_{blk} = 20$ e $N_s = 50$. Il numero medio di fotoni e la varianza, sono rispettivamente: $\langle n \rangle = 10.32 \pm 0.61$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 35.33 \pm 1.88$.

In figura 5.1, viene mostrata la p_n stazionaria calcolata diagonalizzando

l'operatore di Green ottenuto per integrazione diretta della master equation [23]. In figura 5.2, viene invece mostrata la p_n stazionaria calcolata con il metodo Monte-Carlo.

La scelta del time step è fatta tenendo conto delle restrizioni poste nel paragrafo (2.1). La prima condizione impone che δt^{-1} sia molto più piccolo delle frequenze di oscillazione della funzione d'onda. Questa frequenza è

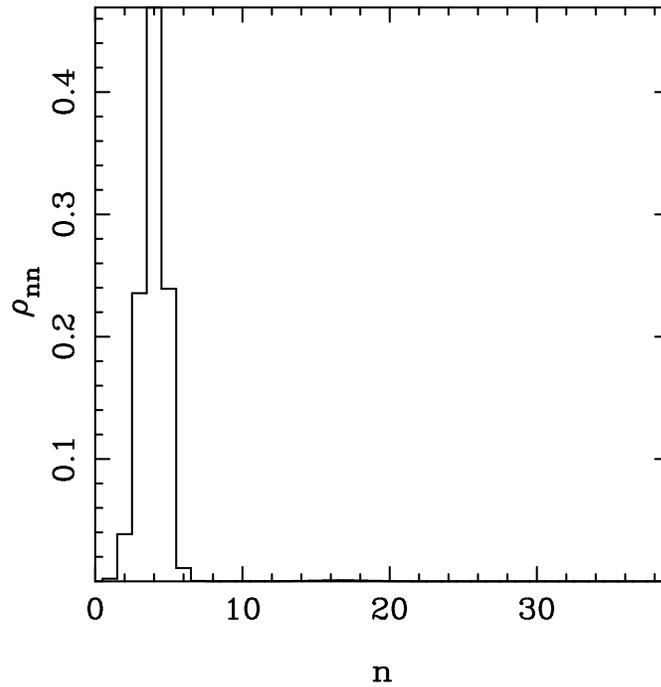


Figura 5.4: Distribuzione di probabilità del numero di fotoni, ottenuta calcolando numericamente l'operatore di Green. I parametri sono: $Nex = 20$, $\theta = 5.5$, $\bar{n} = 0$. Da questa si ricavano il numero medio di fotoni ($\langle n \rangle = 3.99$) e la varianza $\langle \Delta n^2 \rangle = 1.34$

dell'ordine di $g\sqrt{n}$ che al massimo vale $g\sqrt{N_m}$. Quindi si deve avere:

$$g\sqrt{N_m}\delta t \ll 1. \quad (5.20)$$

Ovviamente il δt deve essere molto minore del tempo di interazione τ_{int} . Dalle due figure si vede il buon accordo tra le distribuzioni. Calcolando il numero medio di fotoni e la varianza si può avere un confronto quantitativo. Con il metodo numerico, si ottiene $\langle n \rangle = 10.02$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 40.74$ mentre con il metodo Monte-Carlo si ricava $\langle n \rangle = 9.92 \pm 0.19$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 39.36 \pm 0.47$. Con un numero di campioni pari a 10.000 ($N_{blk} = 100$, $N_s = 100$) si riesce a calcolare $\langle n \rangle$ e $\langle \Delta n^2 \rangle$ con un indeterminazione del 2% per il primo e dell'1% per il secondo. Calcolando la differenza percentuale tra i valori ottenuti con i due diversi metodi, si osserva che mentre per il numero medio di fotoni questa differenza è entro l'indeterminazione (1%), per la varianza sia ha una differenza maggiore (3%). In figura 5.3, è riportato il risultato ottenuto con un numero di campioni minore ($N_{blk} = 20$, $N_s = 50$). La distribuzione è in accordo con quella riportata in figura 5.1. I momenti di questa distribuzione sono: $\langle n \rangle = 10.32 \pm 0.61$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 35.33 \pm 1.88$. L'indeterminazione sul numero medio di fotoni è del 6% mentre quella sulla varianza è pari al 5%. Si osservi che la diminuzione di un fattore 4 del numero di blocchi ha portato un aumento dell'indeterminazione di $\langle n \rangle$ di un fattore 3 mentre quella nella varianza di un fattore 5. Questo risultato non è in accordo con la (2.81) per la quale si sarebbe dovuto avere un peggioramento di un fattore 2. Il motivo è da ricercare nella diminuzione del numero di storie per ciascun blocco,

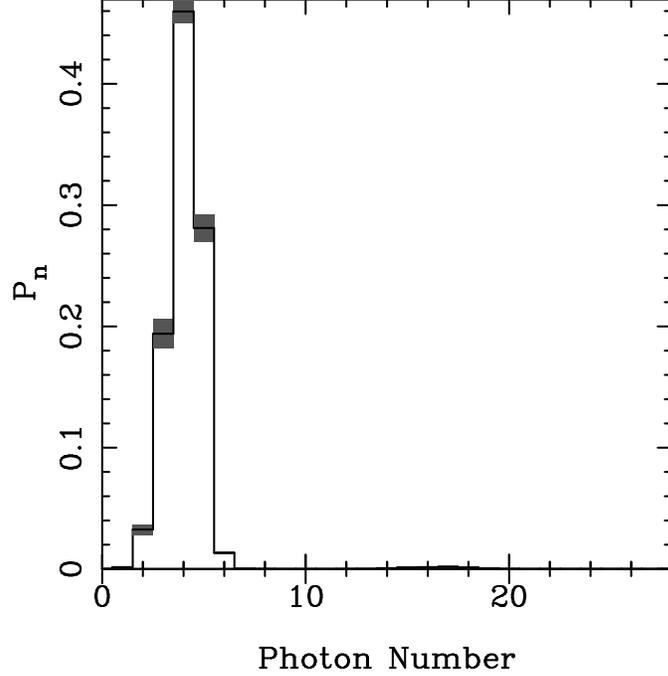


Figura 5.5: Distribuzione di probabilità del numero di fotoni ottenuta con il Metodo Monte-Carlo. I parametri per questa simulazione sono: $g/\gamma_c = 24.596$, $\tau_{int} = 0.05$, $dt = .005$, $\bar{n} = 0$, $N_{blk} = 20$ e $N_s = 50$. Il numero medio di fotoni e la varianza, sono rispettivamente: $\langle n \rangle = 4.20 \pm 0.07$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 1.86 \pm 0.59$.

che rende meno stabile la forma della matrice G . Se si fanno simulazioni aumentando il numero di storie e mantenendo il numero di blocchi costante, si osserva una progressiva diminuzione di tale discrepanza. Quindi, aumentando il numero di storie per ciascun blocco si ricava una matrice più stabile e, ovviamente, medie ed errori statisticamente più corrette, e minori fluttuazioni (barre d'errore più piccole). Se si aumentano solo i blocchi si ha solo un

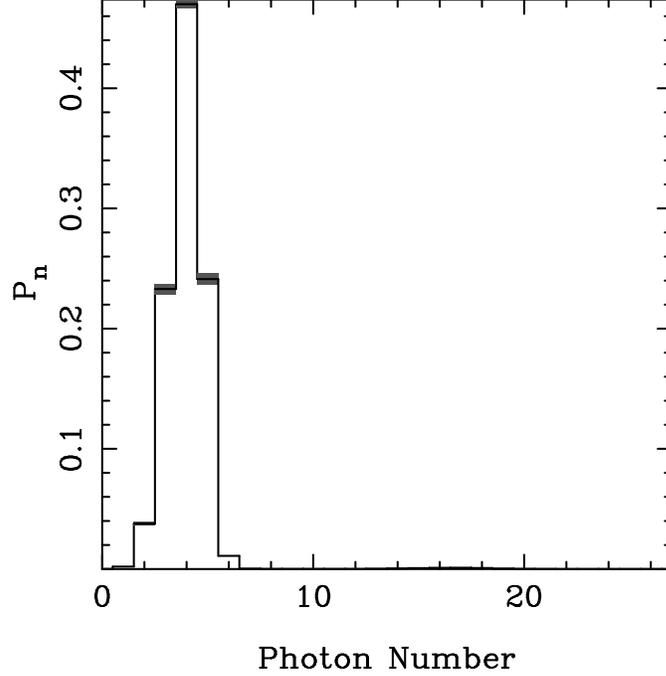


Figura 5.6: Simulazione dello stesso stato stazionario ma con $N_{blk} = 100$ e $N_s = 100$. Il numero medio di fotoni e la varianza, sono rispettivamente: $\langle n \rangle = 4.01 \pm 0.02$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 1.46 \pm 0.13$.

miglioramento della statistica, ma, con poche storie, si hanno valori scorretti.

Nella figure 5.4, 5.5 e 5.6, si mostra la distribuzione di probabilità nel numero di fotoni per un sistema con gli stessi parametri del precedente ma a temperatura nulla ($\bar{n} = 0$). La figura 5.5 mostra il risultato ottenuto nel caso $N_{blk} = 20$ e $N_s = 50$. Già qualitativamente si può notare che la simulazione non riesce a riprodurre esattamente la distribuzione di figura 5.1. Quantitativamente, si vede che la differenza percentuale dei valori simulati

rispetto a quelli esatti (calcolati attraverso l'integrazione diretta della Master Equation) (5% per il numero medio di fotoni e 38% per la varianza) è più grande dell'errore percentuale derivato dalla simulazione (2% e 31%). Se invece si fa una simulazione con $N_{blk} = 100$ e $N_s = 100$, si riproduce esattamente la distribuzione (5.4). In questo caso le differenze percentuali rispetto ai valori esatti della Master Equation (0.3% e 8%) sono minori degli errori percentuali ottenuti dalla simulazione (0.4% per il numero e 9% per la varianza). In questo caso si osserva che il numero di storie è più critico, questo perchè la distribuzione è molto piccata e bastano piccole fluttuazioni per variare di molto la sua forma.

5.2 Generalizzazione del metodo

Il metodo dell'operatore di Green, descritto nel paragrafo precedente per il micromaser ad un atomo, può essere generalizzato e applicato a molti sistemi.

Si consideri un sistema (chiamiamolo sistema 1) interagente con un altro sistema o con un bagno (sistema 2). I due sistemi siano a $t = 0$ disaccoppiati in modo tale che i rispettivi stati appartengano a due distinti spazi di Hilbert. I due sistemi interagiscano per un certo tempo τ . Al termine dell'interazione si calcoli lo stato del sistema 1 tracciando la matrice densità congiunta sullo spazio di Hilbert del sistema 2. Il sistema 1 è ora descritto dalla matrice densità ridotta $\hat{\rho}_S$ ed è di nuovo disaccoppiato dal sistema 2. Questa è la generica situazione a cui può essere applicato il metodo dell'operatore di

Green. In altri termini, si deve avere un sistema la cui matrice densità ridotta abbia una evoluzione di tipo stroboscopico, cioè:

$$\hat{\rho}_S[(n+1)\tau] = e^{\mathcal{R}\tau} \hat{\rho}(n\tau) . \quad (5.21)$$

L'operatore $e^{\mathcal{R}\tau}$ è l'operatore di Green del sistema che evolve la matrice densità ridotta, dove $\hat{\mathcal{R}}$ è:

$$\hat{R}[(n+1)\tau] \equiv \hat{\rho}[(n+1)\tau] \otimes \hat{\nu} = \text{Tr}_2 \left\{ e^{\mathcal{L}\tau} [\hat{\rho}(n\tau) \otimes \hat{\nu}] \right\} \otimes \hat{\nu} . \quad (5.22)$$

Nella (5.22) $\hat{\nu}$ rappresenta la matrice densità dello spazio di Hilbert su cui si traccia al generico tempo $n\tau$. Il problema è, come nel caso del micromaser, calcolare l'operatore $e^{\mathcal{R}\tau}$. Se si riesce a calcolare questo operatore, si ha immediatamente lo stato stazionario che è, per definizione, l'autostato relativo all'autovalore uno dell'operatore di Green.

Per calcolare l'operatore di Green si procede come nel paragrafo precedente: si sceglie una base completa di proiettori per la matrice densità ridotta e si proietta la matrice densità su questa base. In questo modo si ottiene:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k \hat{\varrho}_k , \quad (5.23)$$

dove ϱ_k è il proiettore del tipo $|k\rangle\langle k|$. L'equazione di evoluzione per la ρ_S , scritta in forma matriciale per i proiettori ϱ_k , è:

$$\varrho'_l = \text{Tr}_2 \left[e^{\mathcal{L}\tau} (\hat{\varrho}_l \otimes \hat{\nu}) \right] \equiv \sum_k \left[e^{\mathcal{R}\tau} \right]_{kl} \varrho_k , \quad (5.24)$$

o, equivalentemente, per i coefficienti p_k :

$$p'_l = \sum_k \left[e^{\mathcal{R}\tau} \right]_{lk} p_k , \quad (5.25)$$

dove $\left[e^{\mathcal{R}\tau} \right]_{lk}$ è l'operatore di Green in forma matriciale. Questo operatore può essere simulato con il metodo Monte-Carlo. Si procede nel solito modo:

1. Si evolve la condizione iniziale $\hat{\rho}_k \otimes \nu$ per un k fissato usando il metodo dei Quantum Jumps con N_S storie;
2. si traccia sullo spazio di Hilbert di $\hat{\nu}$, ottenendo in questo modo la k -esima riga di $\left[e^{\mathcal{R}\tau} \right]_{lk}$;
3. si iterano i punti 1-2 variando k sulla base scelta.

Diagonalizzando la matrice ottenuta dalla simulazione e calcolando l'autostato relativo all'autovalore uno si ottiene lo stato stazionario. Per valutare gli errori sullo stato stazionario si procede come descritto nel paragrafo precedente.

Capitolo 6

Micromaser a molti atomi: simulazione del modello a cluster

6.1 Micromaser a cluster ad iniezione regolare

In questo paragrafo viene descritta l'applicazione del metodo dell'operatore di Green al modello di micromaser ad iniezione di cluster regolari.

Nel paragrafo (4.2) si è mostrato che un cluster di atomi può essere descritto come un atomo con $N + 1$ livelli Zeeman. La matrice densità del sistema è una matrice atomo-radiazione la cui evoluzione è data dalla Master Equation (5.1) dove $\mathcal{L}_{\nabla\uparrow\downarrow\S}$ è il solito Liuvilliano di rilassamento, mentre H_S è la (4.13). A $t = 0$ (ingresso del primo atomo in cavità), l'atomo e la radiazione sono disaccoppiati, quindi la $\rho_{AR}(0)$ è data dal prodotto della

matrice densità atomica con quella di radiazione:

$$\rho_{AR}(0) = |N\rangle\langle N| \otimes \rho_R(0) , \quad (6.1)$$

dove l'atomo è supposto essere sul livello più alto N , che corrisponde alla condizione di eccitazione di tutti gli atomi del cluster. La matrice densità della radiazione a $t = 0$ è diagonale nella rappresentazione numero. Quando il cluster esce dalla cavità, la ρ_{AR} viene tracciata sulle variabili atomiche ottenendo così la matrice densità della radiazione. Il processo è del tutto analogo a quello del micromaser ad un atomo e l'evoluzione della ρ_R è data dalle stesse equazioni del paragrafo (5.1), dove bisogna sostituire lo stato atomico $|e\rangle\langle e|$ con lo stato $|N\rangle\langle N|$. L'operatore di Green del sistema è perciò definito dalla relazione:

$$\hat{G}\rho_R = \text{Tr}_A[e^{\mathcal{L}\tau_{int}} |N\rangle\langle N| \otimes \rho_R] . \quad (6.2)$$

Questo operatore viene costruito usando la stessa tecnica descritta nel paragrafo (5.1). In figura 6.1 e in figura 6.2 sono mostrate le distribuzioni di probabilità calcolate per un cluster di 2 e 4 atomi rispettivamente, usando gli stessi parametri della figura 5.3. Il time step usato per evolvere la funzione d'onda in queste simulazioni è più piccolo di quello usato per le simulazioni del micromaser ad un atomo. Infatti, dalle condizioni descritte nel paragrafo (2.1), si ricava che il time step deve essere uguale a quello del micromaser ad un atomo diviso per il numero di atomi del cluster. Si consideri l'equazione

di evoluzione del generico coefficiente $\alpha_k(t)$ della (4.15):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_k(t) = & -g\sqrt{(n-k+1)}\sqrt{k(N-k+1)}\alpha_{k-1}(t) + \\ & +g\sqrt{(n-k)}\sqrt{(N-k)(k+1)}\alpha_{k+1}(t) + \\ & +A_{loss}^{(k)}\alpha_{k+1}(t) .\end{aligned}\quad (6.3)$$

La prima condizione impone che $(\delta t)^{-1}$ sia molto minore della frequenza di oscillazione della funzione d'onda. Tale frequenza è data dal valore dei coefficienti della (6.3):

$$g\sqrt{(n-k+1)}\sqrt{k(N-k+1)} \quad e \quad g\sqrt{(n-k)}\sqrt{(N-k)(k+1)} . \quad (6.4)$$

Massimizzando i coefficienti, cioè sostituendo ad ogni fattore il suo valore massimo, e supponendo $N+1 \simeq N$ si ricava la seguente condizione:

$$gN\sqrt{N_m} \ll 1 . \quad (6.5)$$

Ma $\delta t_1 = 1/g\sqrt{N_m}$ è il time step minimo per la simulazione del micromaser ad un atomo (5.20), perciò si verifica che per un cluster di N atomi il time step è $\delta t = \delta t_1/N$.

Confrontando le distribuzioni di probabilità per cluster di 1, 2 e 4 atomi (si vedano le figure 5.2, 6.1, 6.2 rispettivamente), si nota che l'ingresso di cluster più grandi non solo fa aumentare notevolmente il numero medio di fotoni, ma crea distribuzioni di probabilità dalle diverse caratteristiche. Si noti come dalla distribuzione super-Poissoniana ($\sigma > 1$) a due picchi del caso ad un atomo si passi alla distribuzione sub-Poissoniana ($\sigma < 1$) ad un picco

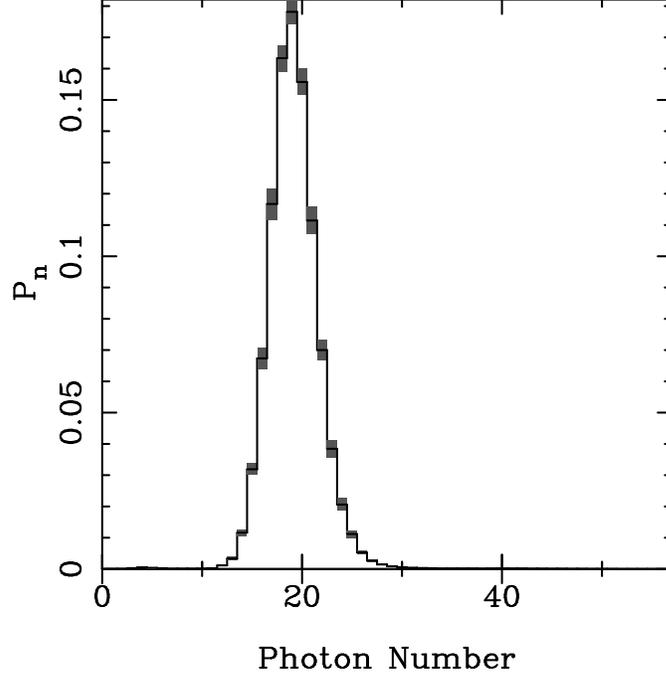


Figura 6.1: Distribuzione di probabilità del numero di fotoni per un cluster di 2 atomi. I parametri per questa simulazione sono: $g/\gamma_c = 24.596$, $\tau_{int} = 0.05$, $dt = .005$, $\bar{n} = 1$, $N_{blk} = 20$ e $N_s = 50$. Il numero medio di fotoni e la varianza, sono rispettivamente: $\langle n \rangle = 19.39 \pm 0.09$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 7.85 \pm 0.46$.

del caso a due atomi e ancora ad una distribuzione a due picchi nel caso di quattro atomi. L'aumento di atomi per ciascun cluster aumenta il numero di fotoni introdotti in cavità, pertanto si ha una progressiva diminuzione delle probabilità per un numero basso di fotoni e l'aumento di quelle a più alto numero di fotoni. Di conseguenza si ha la distruzione dei picchi a basso numero di fotoni e la creazione di altri picchi per n maggiori. Questo modello, come già evidenziato precedentemente, non è molto realistico e pertanto non

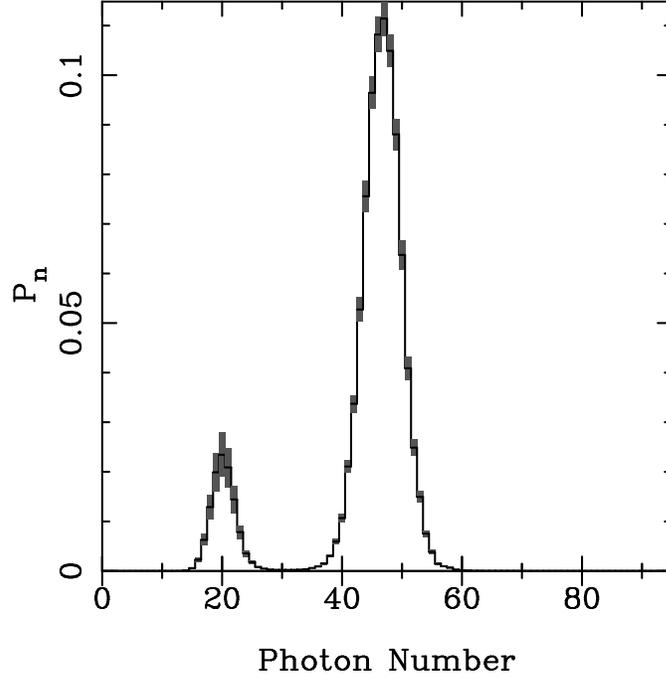


Figura 6.2: Distribuzione di probabilità del numero di fotoni per un cluster di 4 atomi. I parametri per questa simulazione sono: $g/\gamma_c = 24.596$, $\tau_{int} = 0.05$, $dt = .005$, $\bar{n} = 1$, $N_{blk} = 20$ e $N_s = 50$. Il numero medio di fotoni e la varianza, sono rispettivamente: $\langle n \rangle = 43.63 \pm 0.59$ e $\langle \Delta n^2 \rangle = 77.21 \pm 10.92$.

sarà studiato ulteriormente in questa tesi.

6.2 Micromaser ad iniezione di cluster Poissoniani

In questo paragrafo vengono illustrati i risultati del metodo Monte-Carlo e del metodo dell'operatore di Green applicati al modello di micromaser ad iniezione regolare di cluster Poissoniani. Alcuni dei risultati qui descritti

sono stati trattati anche in Ref. [30].

L'interpretazione fisica dei risultati ottenuti con questo modello è complessa a causa della stretta correlazione dei meccanismi di perdita e di guadagno. Ricordiamo che il numero medio di atomi per cluster \overline{N} è dato da:

$$\overline{N} = r\tau_{int} = N_{ex}\gamma_c\tau_{int} . \quad (6.6)$$

L'aumento del numero di atomi per cluster, a parità di angolo di Rabi e a N_{ex} costante, può essere ottenuto soltanto aumentando il tempo di interazione in unità del tempo di vita del fotone $\gamma_c\tau_{int}$ e diminuendo di conseguenza la costante di accoppiamento riscalata $g\gamma_c$. A causa del riscaldamento la variazione del valore di questi parametri può essere realizzata in due modi equivalenti. Il primo corrisponde a variare g e τ_{int} , mantenendo costante l'angolo di Rabi e N_{ex} . Aumentando τ_{int} e mantenendo costante r , si ottiene un numero medio di atomi per cluster maggiore. Fisicamente questo corrisponde a considerare un fascio di atomi più lenti che siano meno accoppiati con la cavità (infatti se si aumenta τ_{int} bisogna diminuire g per avere lo stesso angolo di Rabi). Il secondo modo corrisponde a variare il rate di decadimento della cavità γ_c e il flusso r in modo da mantenere costante N_{ex} (si ricorda che $N_{ex} = r/\gamma_c$) con τ_{int} costante. Aumentando il valore di γ_c si aumenta il numero medio di atomi per cluster. Fisicamente questo corrisponde a considerare un flusso di atomi maggiore in una cavità con maggiori perdite.

L'effetto cooperativo delle perdite e del guadagno è mostrato nelle figure

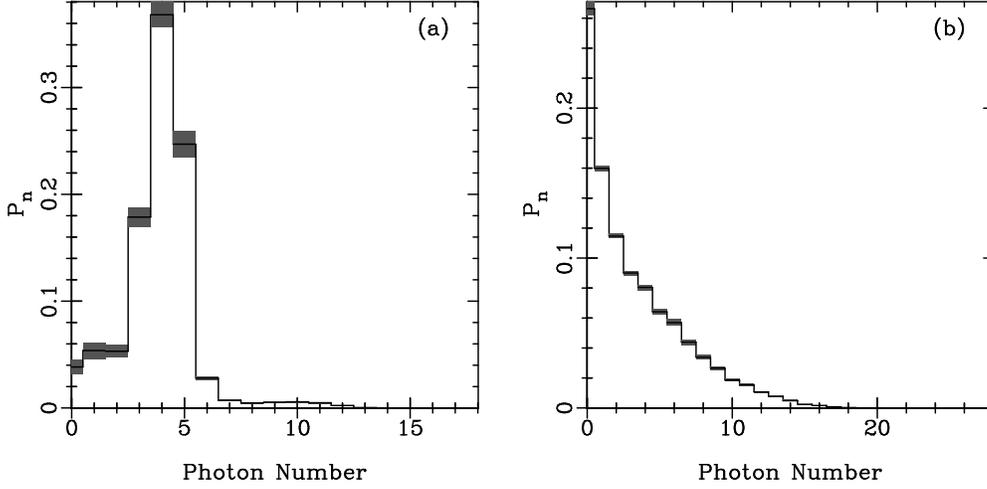


Figura 6.3: Istogrammi della distribuzione di probabilità dello stato stazionario stroboscopico per diversi valori di g/γ_c . In entrambi i casi si ha $N_{ex} = 10$, $\bar{n} = 0$ e τ_{int} tale che l'angolo di Rabi $g\tau_{int} = 2.46$. In (a) si ha $g/\gamma_c = 24$ e quindi $\bar{N} = 1.025$, in (b) si ha $g/\gamma_c = 2.4$ e $\bar{N} = 10.25$. Con questi parametri, il numero medio di fotoni e la varianza normalizzata sono rispettivamente $\langle n \rangle = 3.85 \pm 0.07$, $\sigma = 0.83 \pm 0.05$ (a), $\langle n \rangle = 3.19 \pm 0.07$, $\sigma = 1.89 \pm 0.007$ (b).

6.3(a) e 6.3(b) dove vengono riportati due istogrammi relativi alla distribuzione di probabilità del numero di fotoni per lo stesso angolo di Rabi ($g\tau_{int} = 2.46$), ma con diversi valori di g/γ_c ($g/\gamma_c = 2.4$ e $g/\gamma_c = 24$ rispettivamente). Calcolando il numero medio di atomi per ciascun cluster nei due istogrammi, si ricava $\bar{N} = 1.025$ per l'istogramma (a) e $\bar{N} = 10.25$ per l'istogramma (b) (dove $\bar{N} = r\tau_{int}$). La situazione fisica descritta dai due istogrammi è molto diversa. Nel primo si osserva una distribuzione di fotoni ad un picco di probabilità intorno ad $n = 5$. Nel secondo, si ha

una distribuzione di probabilità piccata sul vuoto. Il numero medio di fotoni è praticamente uguale per le due distribuzioni ($\langle n \rangle = 3.85 \pm 0.07$ e $\langle n \rangle = 3.19 \pm 0.05$ rispettivamente) mentre la varianza normalizzata è diversa nei due casi ($\sigma = 0.83 \pm 0.03$ e $\sigma = 1.890 \pm 0.007$ rispettivamente). Questo diverso comportamento è dovuto alle maggiori perdite che tendono a spostare la distribuzione verso il vuoto e alla presenza di un numero maggiore di atomi per ciascun cluster, che tende ad allargare la distribuzione verso numeri alti di fotoni. Infatti, confrontando le due distribuzioni, si vede che mentre la distribuzione in (a) è praticamente nulla a partire da $n = 13$, la distribuzione in (b) è zero a partire da $n = 18$. L'estendersi della distribuzione spiega perchè il numero medio di fotoni rimanga costante nei due casi e giustifica l'aumento della varianza normalizzata. Il fatto che il numero medio di fotoni sia circa uguale non è verificato per due generiche distribuzioni: infatti, se si osservano le figure 6.4(a) e 6.6(b) si possono trovare facilmente punti che a parità di angolo di Rabi danno un numero di fotoni molto diverso (es: per $g\tau_{int} = 4$ si ha un numero di fotoni più alto per il caso con maggiori perdite, mentre per $g\tau_{int} = 1.1$ si ha un numero di fotoni più grande per il caso a minori perdite). In altri termini, l'effetto congiunto dell'incremento del guadagno e delle perdite dipende dal particolare valore dell'angolo di Rabi.

In figura 6.4(a) viene mostrato il numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ in funzione dell'angolo di Rabi $g\tau_{int}$ per $g/\gamma_c = 24$, $N_{ex} = 10$ e $\bar{n} = 0$. Il grafico è ottenuto variando il tempo di interazione τ_{int} , perciò il

numero medio di atomi per ciascun cluster aumenta all'aumentare dell'angolo di Rabi. Per piccoli valori di $g\tau_{int}$ si ha una situazione vicina a quella del micromaser standard: ad esempio al primo picco ($g\tau_{int} = 0.49$) si ha $\bar{N} = 0.2$, e la probabilità di avere 0 e 1 atomo in cavità sono rispettivamente $p_0 = 0.82$, $p_1 = 0.16$. La probabilità che vi sia più di un atomo eccitato in cavità è del 2% circa, ma ciò nonostante non si osservano evidenti differenze dal modello ad un atomo. Nel grafico si arriva ad avere un massimo numero medio di atomi per cluster uguale a 2.5.

L'effetto più evidente rispetto al caso ad un atomo è la completa cancellazione degli stati trappola. Si può capire questo fatto nel seguente modo: si supponga che il micromaser soddisfi la condizione di trapping (3.17) e che le perdite della cavità siano trascurabili. Si supponga ora che un cluster di 2 atomi entri in cavità. La frequenza di scambio dei fotoni tra cluster e cavità è leggermente diversa, perchè dipende dal numero di atomi (si veda 4.19), pertanto all'uscita del cluster dalla cavità c'è una probabilità non nulla che il cluster abbia ceduto dei fotoni. Si creano probabilità non nulle aldilà della trappola che vengono poi amplificate dall'iniezione di successivi atomi, quindi la trappola viene distrutta [29]. Per angoli di Rabi maggiori di 4 il numero medio di fotoni è costante: in questo caso l'aumento del pompaggio è bilanciato dall'aumento del numero di fotoni persi a causa dell'aumento del tempo di interazione.

In figura 6.5 viene confrontato questo modello con i modelli di micromaser

ad un atomo [23]: si evidenziano l'assenza degli stati trappola e l'invarianza

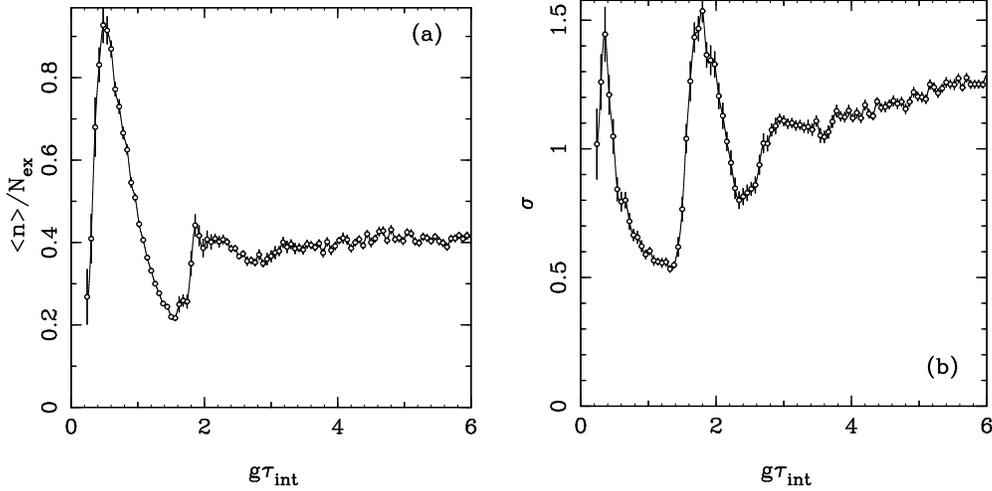


Figura 6.4: Numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ (a) e la varianza normalizzata σ (b) per $N_{ex} = 10$, $\bar{n} = 0$. Il parametro di pompaggio θ viene aumentato variando τ_{int} a fissato $g/\gamma_c = 24$. Per $\theta = 1.57$, corrispondente all'intensità massima della radiazione, il numero medio di atomi per cluster $\bar{N} = 0.2$.

del primo picco.

In figura 6.4(b) viene mostrata la varianza normalizzata relativa allo stesso caso. Si osserva che la σ è maggiore di uno e aumenta in modo monotono per $g\tau_{int} > 4$ mentre il numero medio di fotoni è costante per lo stesso intervallo. Intuitivamente si può dire che l'aumento progressivo del numero medio di atomi per cluster genera un pompaggio con maggiori fluttuazioni che provoca un maggiore allargamento della distribuzione dei fotoni. Inoltre le perdite tendono ad allargare la distribuzione verso il vuoto contribuendo

all'aumento della varianza. Per $g\tau_{int} < 4$ si ha una struttura simile al mi-

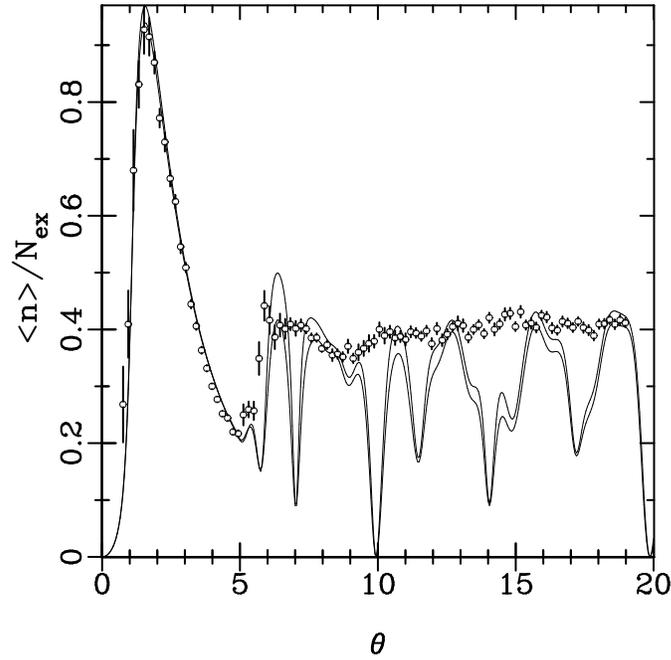


Figura 6.5: Il numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ per micromaser a cluster Poissoniani è confrontato con la stessa quantità per il micromaser ad un atomo ad iniezione regolare in regime di alti flussi (linea in alto), e con il micromaser standard per bassi flussi (linea in basso). I parametri sono $N_{ex} = 10$, $\bar{n} = 0$. Per il micromaser a cluster Poissoniani si ha $\frac{g}{\gamma_c} = 24$.

micromaser standard con due picchi in prossimità della prima e della seconda soglia e due intervalli dove le distribuzioni sono subpoissoniane.

Consideriamo ora un caso con perdite maggiori e con cluster più grandi. In figura 6.6 vengono mostrati $\langle n \rangle / N_{ex}$ e σ in funzione dell'angolo di Rabi per $g/\gamma_c = 2.4$ e con $N_{ex} = 10$ e $\bar{n} = 0$. In questo caso già per piccoli angoli

di Rabi si ha un \bar{N} abbastanza grande (ad esempio sul picco si ha $\bar{N} = 2$). Si osservi il numero medio di fotoni normalizzato: al crescere dell'angolo di Rabi si ha una struttura regolare di picchi che si smorzano al crescere dell'angolo di Rabi. Il primo picco si ha per $g\tau_{int} \simeq 0.49$, come nel caso del micromaser standard. Il picco successivo è localizzato a $g\tau_{int} \simeq 2$, anche in questo caso la posizione è la stessa del micromaser standard. A differenza del caso precedente, qui è evidente un terzo picco, localizzato in $g\tau_{int} \simeq 3$ che corrisponde ad avere $\bar{N} \simeq 12$. Alla fine il numero medio di fotoni si stabilizza su un valore asintotico che è più grande di quello osservato per il caso precedente. La presenza di un ulteriore picco nel numero medio di fotoni, e lo stabilizzarsi su un valore asintotico più grande, indicano che in questo caso il meccanismo di pompaggio è più efficiente rispetto al caso precedente, malgrado l'incremento delle perdite della cavità.

La varianza normalizzata è mostrata in figura 6.6(b). Per questi parametri la σ è sempre maggiore di quella del caso precedente, in particolare si ha una statistica subpoissoniana solo dopo il primo picco. Per $g\tau_{int} > 4.2$ la σ è praticamente costante. Questo fatto si spiega osservando che le distribuzioni stazionarie per alti valori dell'angolo di Rabi sono piccate sul vuoto. In questo caso le perdite tendono a stringere la distribuzione verso il vuoto mentre l'incremento del numero di atomi tende ad allargarle verso un numero di fotoni alto. I due meccanismi contrapposti raggiungono l'equilibrio e la deviazione standard rimane costante.

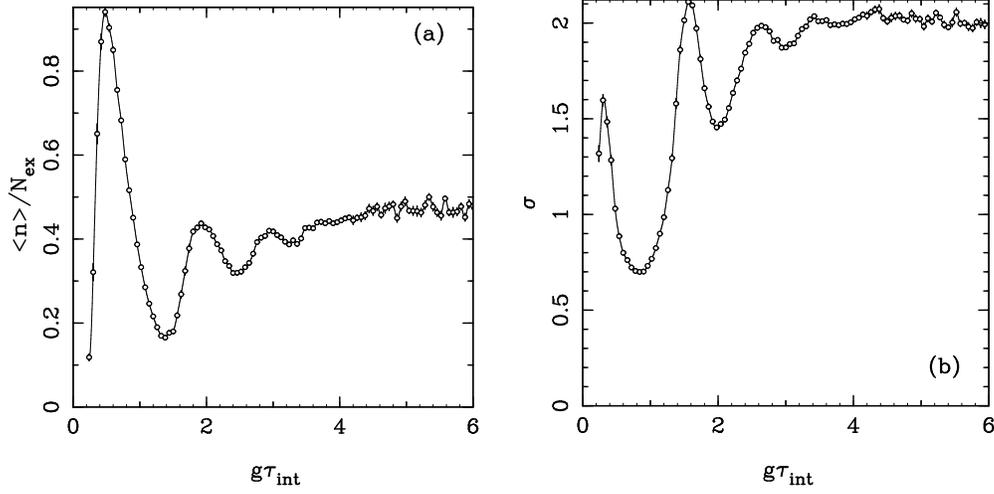


Figura 6.6: Numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ (a) e la varianza normalizzata σ (b) per $N_{ex} = 10$, $\bar{n} = 0$. Il parametro di pompaggio θ viene aumentato variando τ_{int} a fissato $g/\gamma_c = 2.4$. Per $\theta = 1.57$, corrispondente all'intensità massima della radiazione, il numero medio di atomi per cluster $\bar{N} = 2$.

Se si esclude la distruzione degli stati trappola, la dinamica del numero medio di fotoni normalizzato in funzione dell'angolo di Rabi non ha mostrato fino ad ora particolari differenze dal caso di micromaser ad un atomo. La situazione cambia notevolmente aumentando le perdite della cavità e, di conseguenza, considerando un numero medio di atomi per cluster maggiore. In figura 6.7, vengono mostrati il numero medio di fotoni (simboli bianchi) e la varianza normalizzata (simboli neri) in funzione di \bar{N}/N_{ex} , calcolati per diversi valori di N_{ex} . Nella figura i punti circolari sono i punti calcolati con $N_{ex} = 16$, quelli triangolari sono i punti calcolati con $N_{ex} = 8$ mentre quel-

li quadrati sono i punti calcolati con $N_{ex} = 4$. Il calcolo è stato fatto con $\theta = \pi/2$, cioè per il valore di θ corrispondente al primo massimo di $\langle n \rangle / N_{ex}$ per il micromaser standard. Si osserva che la varianza rimane costante fino a $\bar{N} \simeq N_{ex}$ indipendentemente dal valore del flusso; dopo questo punto il suo valore cresce molto rapidamente. In altri termini le caratteristiche del campo in cavità variano completamente passando da una statistica Poissoniana a una statistica altamente super-Poissoniana. L'andamento di $\langle n \rangle / N_{ex}$ dipende dal valore di N_{ex} : si ha un andamento costante fino ad un valore che varia circa da 2^{-2} a 2^0 al crescere del flusso efficace e, per valori maggiori, diminuisce. Si osserva che l'effetto sulle caratteristiche del campo dell'iniezione a cluster risulta particolarmente evidente solo per valori di \bar{N} maggiori di N_{ex} che, pertanto, può essere interpretato come valore critico per la “transizione di fase” dal campo del micromaser standard ad un campo dalle nuove caratteristiche dovute all'iniezione a cluster.

Si osservi la variazione del numero medio di fotoni per un singolo valore di N_{ex} : nella figura 6.8 si vedrà che tale variazione è dovuta ad uno spostamento progressivo del primo massimo di $\langle n \rangle / N_{ex}$ che, al diminuire di γ_c , si sposta verso valori minori dell'angolo di Rabi.

Le proprietà della radiazione in cavità variano molto all'aumentare delle perdite e del numero medio di atomi per cluster. In figura 6.8 e in figura 6.9, sono riportati l'andamento di $\langle n \rangle / N_{ex}$ e di σ in funzione di $g\tau_{int}$, per diversi valori di g/γ_c . Si osserva che dal comportamento simile al micromaser ad un

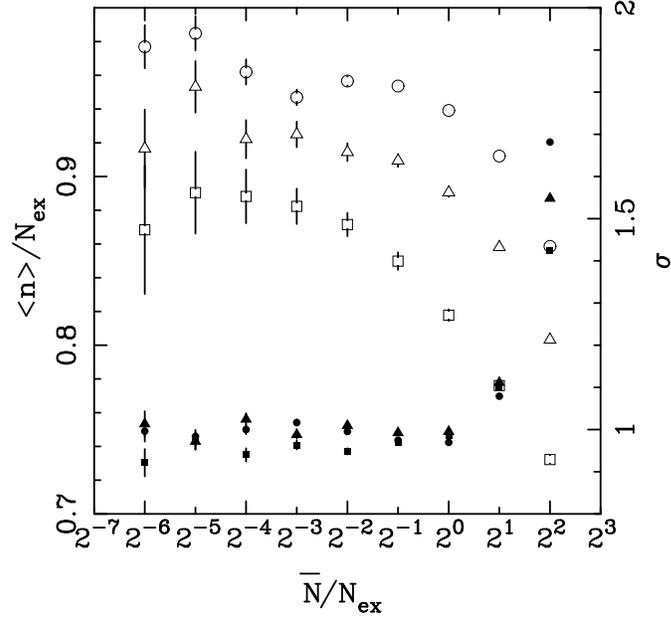


Figura 6.7: Numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ (simboli bianchi) e varianza normalizzata σ in funzione di \bar{N} / N_{ex} calcolati per diversi valori di N_{ex} (simboli quadrati per $N_{ex} = 4$, triangolari per $N_{ex} = 8$ e circolari per $N_{ex} = 16$). Il calcolo è fatto con $\theta = \pi/2$.

atomo del caso con $g/\gamma_c = 2.4$, si passa ad una situazione completamente diversa per gli altri casi. Il primo picco ha una piccola deriva verso angoli di Rabi più bassi al diminuire di g/γ_c , mentre il numero di picchi nell'intervallo di $g\tau_{int}$ tra zero e due aumenta progressivamente. Per $g/\gamma_c = 2.4$ si ha una situazione simile a quella del micromaser ad un atomo con il secondo picco a $g\tau_{int} \simeq 1.9$. In questo caso il numero medio di atomi, che cresce all'aumentare di $g\tau_{int}$, arriva ad un valore massimo uguale ad 8. Nel caso successivo dove $g/\gamma_c = 0.96$, il valore massimo per \bar{N} , è circa 20. Nel primo caso si ha

$\bar{N} < N_{ex}$ e l'andamento è simile a quello del micromaser ad un atomo, mentre nel secondo caso, dove $\bar{N} > N_{ex}$, si osserva uno spostamento del secondo picco che è qui localizzato a $g\tau_{int} \simeq 1.5$. Nel caso successivo ($g/\gamma_c = 0.72$), oltre ad un ulteriore spostamento del secondo picco, ora localizzato in $g\tau_{int} \simeq 1.4$, si osserva l'apparizione di un terzo picco in $g\tau_{int} \simeq 1.9$. I casi successivi, evidenziano ulteriormente questo comportamento, con la creazione di nuovi picchi e una progressiva diminuzione della distanza tra essi. Questo nuovo comportamento è evidente per valori di \bar{N} maggiori di N_{ex} . In altri termini, sembra che $\bar{N} = N_{ex}$ possa essere interpretato in generale come punto critico per la transizione dal comportamento del campo di radiazione tipico del micromaser a un nuovo tipo di comportamento dato dalla struttura a cluster dell'iniezione atomica.

Osserviamo ora il caso con $g/\gamma_c = 0.24$, dove le perdite della cavità sono molto grandi e il numero medio di atomi per cluster è al massimo uguale a 80. Qui il primo picco è notevolmente spostato rispetto a quello del micromaser ed è localizzato a $g\tau_{int} \simeq 1.4$. Per valori maggiori dell'angolo di Rabi, si osserva una struttura composta da 4 picchi localizzati in $g\tau_{int} \simeq 0.9, 1.3, 1.6, 1.9$ rispettivamente. In questo caso, i valori massimi di $\langle n \rangle / N_{ex}$ diminuiscono progressivamente così come i valori minimi. Il numero medio di fotoni sembra tendere a zero per grandi valori di $g\tau_{int}$ a causa delle grandi perdite e nonostante l'elevato numero di atomi dei cluster.

L'andamento della varianza per gli stessi parametri è mostrato in figura

6.9. Anche in questo caso, si passa da una struttura a due picchi, simile a quella del micromaser ad un atomo, ad una struttura a multipicchi. L'aumento progressivo del numero di atomi del cluster diminuisce la zona in cui la distribuzione è subpoissoniana. Questa zona nel caso $g/\gamma_c = 2.4$ si estende per valori di $g\tau_{int}$ che vanno da 0.5 a 1.2; nel caso $g/\gamma_c = 0.96$ è compresa tra 0.5 e 0.8 e si riduce progressivamente fino al caso $g/\gamma_c = 0.24$ dove la σ è sempre maggiore di 1. Il valore della σ in prossimità dei massimi è invece praticamente costante in tutti i casi. La ragione di questo comportamento si trova osservando la distribuzione di probabilità nel numero di fotoni in prossimità dei massimi e dei minimi della varianza.

Studiamo ulteriormente la radiazione in cavità osservando la distribuzione del numero di fotoni. In figura 6.10, vengono mostrate le distribuzioni di probabilità calcolate per $g\tau_{int} = 1.44$ e con $N_{ex} = 10$ a temperatura nulla per i diversi valori di g/γ_c usati nella figure 6.8 e 6.9.

Si osserva che nel caso in cui la distribuzione sia relativa ad un minimo del numero medio di fotoni, è una distribuzione piccata sul vuoto simile ad una termica. Nel caso in cui sia relativa ad un massimo, invece, la distribuzione è ancora ad un picco, ma con valore non nullo. Questo andamento vale anche in presenza di forti perdite, come nel caso a $g/\gamma_c = 0.24$. In figura 6.11, vengono mostrate distribuzioni di probabilità per $g/\gamma_c = 0.24$, per diversi valori dell'angolo di Rabi, corrispondenti a minimi e massimi del numero medio di fotoni.

Anche in questo caso, le distribuzioni relative ad un minimo di $\langle n \rangle / N_{ex}$, sono piccate sul vuoto mentre le distribuzioni relative ad un massimo hanno un picco localizzato su un numero non nullo di fotoni. In quest'ultimo caso, l'incremento delle perdite viene compensato dall'aumento del numero medio di atomi del cluster che, per particolari valori dell'angolo di Rabi, lasciano in cavità più fotoni di quanto la cavità riesca a perderne, e quindi la distribuzione tende a piccarsi su un numero di fotoni diverso dal vuoto. Inoltre, si può osservare come le distribuzioni piccate sul vuoto siano localizzate in prossimità di un massimo della varianza, mentre quelle piccate su un valore non nullo del numero di fotoni siano in una zona vicino ad un minimo. In prossimità dei massimi della varianza le perdite tendono a stringere la distribuzione di probabilità sul vuoto, mentre l'aumento del numero medio di atomi per cluster tende ad allargare la distribuzione. Pertanto, i due effetti tendono a compensarsi e quindi il valore della varianza non ha grandi variazioni nei diversi casi. In prossimità di un minimo, invece, le perdite tendono ad allargare la distribuzione verso il vuoto mentre l'aumento di \bar{N} tende ad allargarle verso valori alti del numero di fotoni: pertanto i due effetti si sommano e la varianza aumenta all'aumentare delle perdite e del numero medio di atomi per cluster.

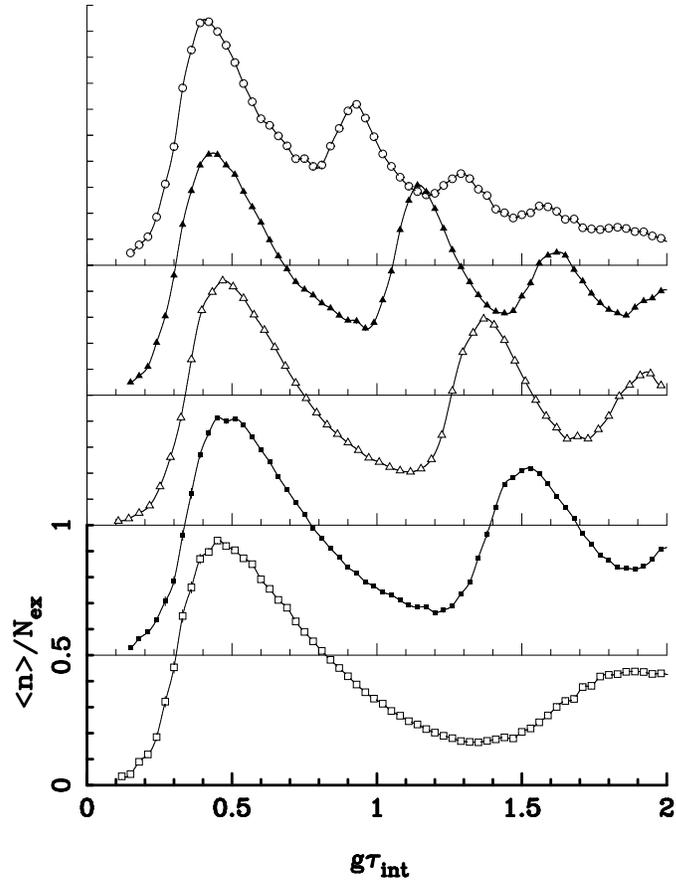


Figura 6.8: Numero medio di fotoni normalizzato $\langle n \rangle / N_{ex}$ per micromaser a cluster Poissoniani in funzione dell'angolo di Rabi calcolato con diversi valori di g/γ_c a parità di $N_{ex} = 10$. Ciascun grafico è spostato sulle ordinate di 0.5. I valori di g/γ_c sono, andando dal basso verso l'alto: 2.4, 0.96, 0.72, 0.48, 0.24. Il numero di fotoni termici è $\bar{n} = 0$ per tutti i grafici.

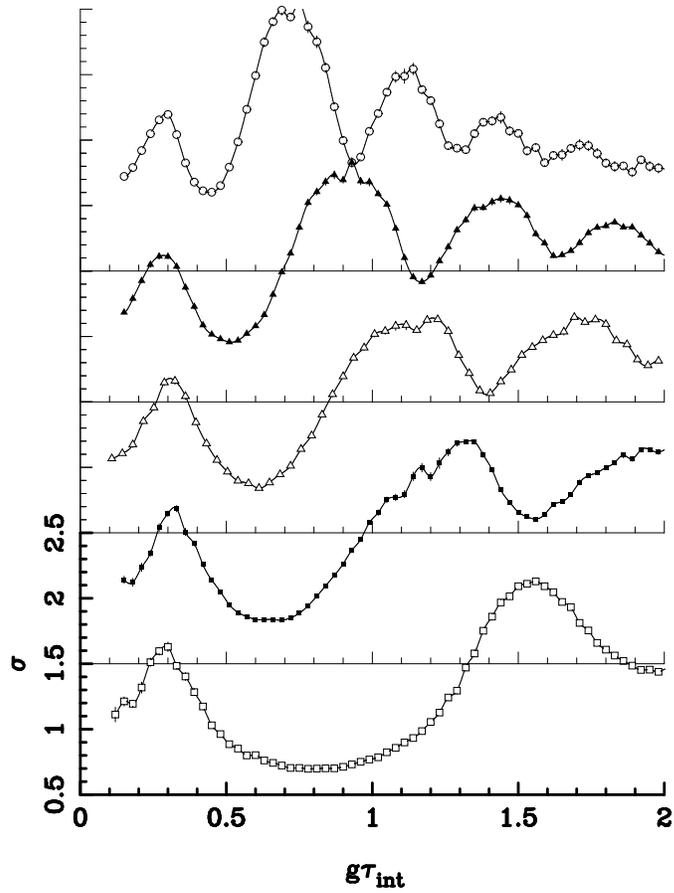


Figura 6.9: Varianza normalizzata σ per micromaser a cluster Poissoniani in funzione dell'angolo di Rabi calcolata con diversi valori di g/γ_c a parità di $N_{ex} = 10$. Ciascun grafico è spostato sulle ordinate di 1.5. I valori di g/γ_c sono, andando dal basso verso l'alto: 2.4, 0.96, 0.72, 0.48, 0.24. Il numero di fotoni termici è $\bar{n} = 0$ per tutti i grafici.

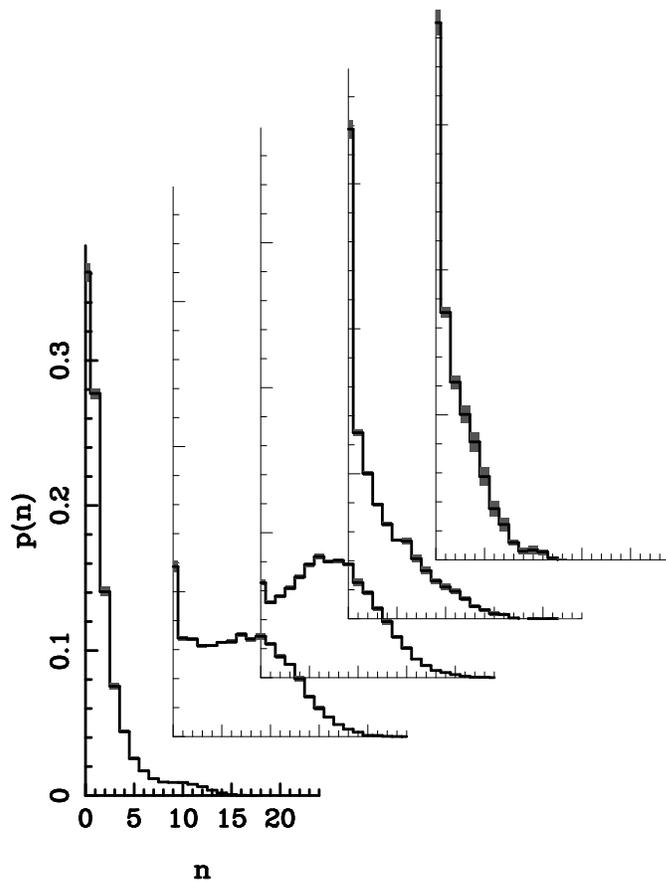


Figura 6.10: Distribuzioni di probabilità nel numero di fotoni per $g\tau_{int} = 1.44$ per diversi valori di g/γ_c per $N_{ex} = 10$ e $\bar{n} = 0$. I valori di g/γ_c sono rispettivamente dal basso verso l'alto: 2.4, 0.96, 0.72, 0.48, 0.24.

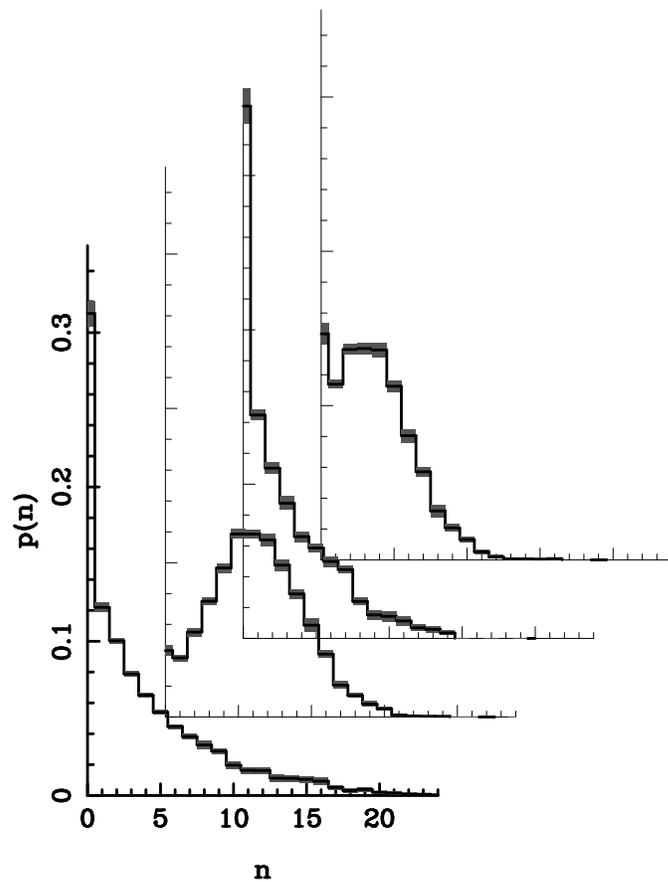


Figura 6.11: Distribuzioni di probabilità per $g/\gamma_c = 0.24$ con $N_{ex} = 10$ e $\bar{n} = 0$ per diversi valori dell'angolo di Rabi. I valori di $g\tau_{int}$ sono rispettivamente dal basso verso l'alto: 0.78, 0.93, 1.17, 1.29.

Capitolo 7

Conclusioni

In questa tesi si è descritto il Metodo Monte-Carlo della funzione d'onda e si mostra come tale metodo sia un utile strumento per lo studio di sistemi quantistici aperti complessi. Il metodo Monte-Carlo consente di simulare qualsiasi sistema la cui dinamica sia descritta da una generica Master Equation e consente di avere una stima di osservabili con la loro barra d'errore, per sistemi che non sarebbero altrimenti simulabili.

Il metodo Monte-Carlo è stato applicato ad uno studio intensivo del micromaser. Si è simulata la dinamica di un atomo e di un cluster di atomi in cavità risonante, calcolando l'evoluzione del numero medio di fotoni e della inversione di popolazione. Si sono messi in evidenza gli effetti cooperativi delle oscillazioni di Rabi e delle perdite.

Successivamente, si è descritto il metodo dell'operatore di Green per il calcolo dello stato stazionario della radiazione e si è applicato il metodo Monte-Carlo alla costruzione di questo operatore. Questa procedura è stata

testata nel caso del micromaser ad un atomo con iniezione regolare, confrontando le distribuzioni simulate con quelle ottenute attraverso l'integrazione numerica della Master Equation.

Il metodo è stato esteso al micromaser a più atomi con iniezione di cluster Poissoniani. Si è studiato lo stato stazionario della radiazione al variare dei diversi parametri del sistema. Si è osservato che gli stati trappola vengono completamente distrutti dalla presenza, anche sporadica, di cluster a più atomi. L'andamento del numero medio di fotoni e della varianza normalizzata in funzione dell'angolo di Rabi è stato studiato per diversi valori della costante di accoppiamento riscalata g/γ_c . Si è osservato uno spostamento del primo picco verso valori dell'angolo di Rabi minori, spostamento che risulta evidente solo per un numero medio di atomi per cluster maggiore di N_{ex} . Il comportamento del numero medio di fotoni rimane simile a quello del micromaser ad un atomo, per valori di g/γ_c abbastanza grandi (pochi atomi per cluster). Diminuendo ulteriormente il valore di g/γ_c , cioè aumentando il numero di atomi per cluster, si osserva l'insorgere di una struttura a multipicchi, nonostante l'incremento progressivo delle perdite. Si vede in generale una variazione dal comportamento tipico del micromaser standard solo per valori di \bar{N} maggiori di N_{ex} .

L'interpretazione fisica di questi risultati non è ovvia, a causa del legame tra incremento del numero medio di atomi del cluster e del rate di decadimento della cavità: l'incremento contemporaneo dei due parametri, crea

effetti cooperativi difficili da prevedere.

Lo studio fatto in questa tesi è il primo esempio di studio numerico di un modello completamente quantistico del micromaser a molti atomi. Gli unici esempi di studio analitico di modelli quantistici del micromaser a più atomi si possono trovare in [29] e [31], limitatamente però alla situazione in cui si hanno al massimo due atomi in cavità.

Lo studio di modelli completamente quantistici di micromaser a più atomi, che tengano conto anche delle perdite della cavità, è un campo di ricerca ancora aperto. La difficoltà di simulare questo tipo di sistemi, dovuta anche ai grandi tempi di calcolo necessari, può essere in parte rimossa attraverso l'applicazione del metodo Monte-Carlo che, pertanto, apre nuove prospettive di sviluppo per questo tipo di ricerca.

Bibliografia

- [1] W.H.Luisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Cap. 6, pag 331, Wiley, New-York (1973).
- [2] H.Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Cap. 1 e 2, Springer-Verlag, Heidelberg (1993).
- [3] K.Mølmer, *Density Matrices and the Quantum Monte-Carlo Method in Quantum Optics*, Lezioni presentate alla *Winter School on Quantum Optics*, ICTP Trieste (1994).
- [4] J.Dalibard, Y.Castin and K.Mølmer, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 580 (1992).
- [5] J.Dalibard, Y.Castin and K.Mølmer, *J. Opt.Soc.Am B* **10**, 524 (1993).
- [6] R.Dum, P.Zoller and H.Ritsch, *Phys. Rev. A* **45**, 4879 (1992).
- [7] M.D. Srinivas and E.B.Davies, *Opt. Acta* **28**, 981 (1981).
- [8] B.R. Mollow, *Phys. Rev. A* **12**, 1919 (1975).
- [9] R. Dum, A. S. Parkins, P. Zoller and C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **46**, 4382 (1992).

- [10] P.Filipowicz, J.Javanainen and P.Meystre, Phys. Rev. A **34**, 3077 (1986).
- [11] E.T.Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [12] D.Meschede, H.Walther and G.Müller Phys. Rev. Lett. **54** (1985)
- [13] G.Rempe, F. Schmidt-Kahler and H.Walther, Phys. Rev. Lett. **64**, 2783 (1990).
- [14] H.Walther, Phys. Rep. **219** (1992)
- [15] P.Meystre and M.Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, (Springer-Verlag, Heildeberg 1990).
- [16] G.Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 199 (1976)
- [17] R.H.Dicke, Am. J. Phys. **49**, 925 (1981).
- [18] H.Press and A.Teukolosky *Numerical Recipes* Cambridge Univ. Press., New York (1992)
- [19] G.Rempe and H.Walther, Phys. Rev. A **42**,1650 (1990).
- [20] G.Rempe, H.Walther and N.Klein, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [21] A.M.Guzman, P.Meystre, and E.M.Wright, Phys. Rev. A **40**, 2471 (1989).
- [22] J.Bergou and M.Hillery, Phys. Rev. A **49**, 1214 (1994).

- [23] G.M. Dariano, R. Seno and N. Sterpi, *Regularly Injected One-atom Maser in the High-Fluxes Regime: a Numerical Study* (inviato per pubblicazione a Am. J. Opt. Soc Am. B).
- [24] D.Meschede, Phys. Rep. **5**, 202 (1992)
- [25] P.Filipowicz, J.Javanainen and P.Meystre, J. Opt. Soc. Am B **3**, 906 (1986).
- [26] P.Meystre, G.Rempe and H.Walther Opt. Lett. **13**, 1078 (1988).
- [27] W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York (1957), pag. 328-340.
- [28] R.Bellman, *Matrix Analysis*, Mc Graw-Hill, New York (1960), Cap 14.
- [29] E.Weohner, R.Seno, N.Sterpi, B.G. Englert and H. Walther *Atom pairs in the micromaser* (inviato per pubblicazione a Opt. Comm.).
- [30] G.D'Ariano, N.Sterpi and A.Zucchetti, *Fine structure of thresholds in a micromaser pumped with atom clusters*. (inviato per pubblicazione a Phys. Rev. Lett.).
- [31] M.Orszag, R.Ramírez, J.C.Retamal and C.Saavedra, Phys. Rev. A **49**, 2933 (1994).